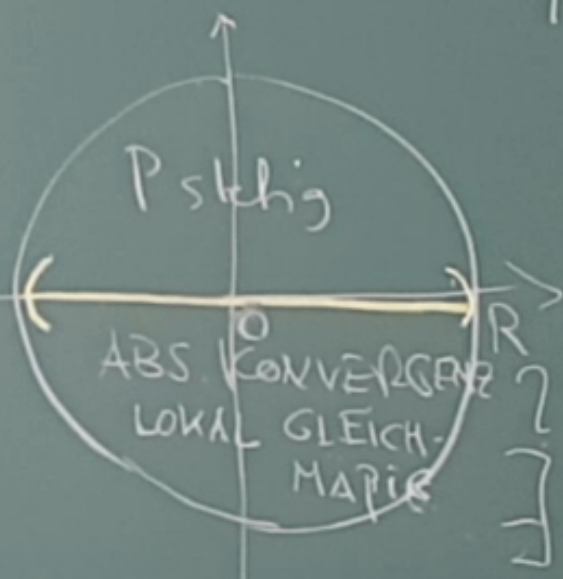


$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$



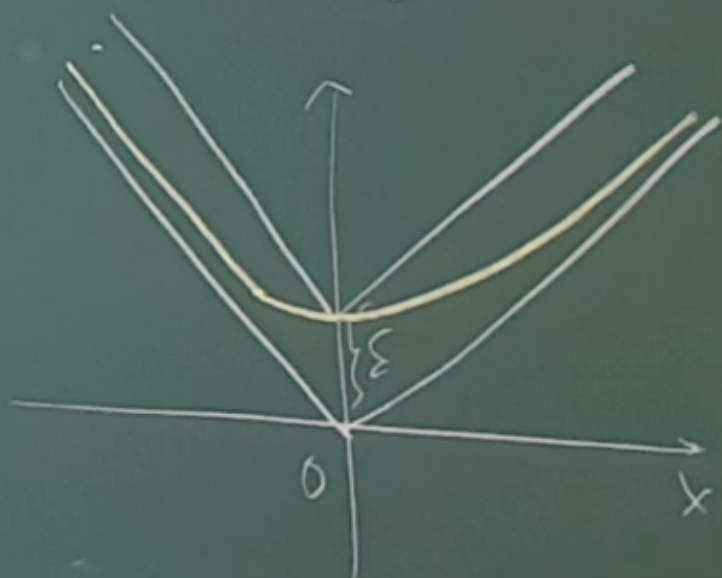
DIVERGENZ

$$\left[ \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_k x^k \right.$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$f_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_\varepsilon(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$$

$$\text{Es gilt } |x| \leq f_\varepsilon(x) \leq |x| + \varepsilon$$



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = |x|, \text{ nicht diff'bar in } x=0.$$

Satz (Vertauschung zwischen Konvergenz und Ableitung)

Sei  $f_k \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ ,  $I = (a, b)$ ,  
punktweise konvergent gegen  
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Konvergiert  $f'_k$  gleichmäßig

$$\|f'_k - g\|_I \rightarrow 0.$$

→ gegen ein  $g: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , so folgt

$$f' = g \text{ und } f \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$$

Beweis. Wähle  $x_0 \in I$ . Dann gilt nach Hauptsatz

$$f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^x f_k'(y) dy$$

Vertausche Limes  $f_k' \rightarrow g$  mit Integral (Analysis 1)  
und lern  $k \rightarrow \infty$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(y) dy$$

$g$  ist stetig nach Lebesgue-Satz

$$\Rightarrow f \in C^1(I, \mathbb{R}^m) \text{ und } f' = g$$



Lemma Sei  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R \in [0, \infty]$ .

Dann hat die formal differenzierte Reihe denselben Konvergenzradius  $R$ .

Beweis  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$   $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1}$

$$|a_k z^k| \leq |z| |a_k z^{k-1}| \leq |z| |k a_k z^{k-1}| \quad (\text{für } k \geq 1)$$

$$\text{radius}(P) \geq \text{radius}(Q)$$

Zu  $r \in (0, R)$  gibt es ein  $M < \infty$  mit  $|a_k| r^k \leq M \quad \forall k$   
Sei  $z \in B_r(0)$ .

$$|k a_k z^{k-1}| = k \underbrace{|a_k| r^k}_{\leq M} \frac{|z|^{k-1}}{r^k} \leq \frac{k M |z|^{k-1}}{r^k}$$

Quotientenkriterium:  $\frac{(k+1) M |z|^k}{r^{k+1}} \bigg/ \frac{k M |z|^{k-1}}{r^k} = \frac{(k+1) |z|}{k r} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{|z|}{r} < 1.$

$\Rightarrow$  Konvergenzradius  
gleich.



## Satz (Differenzierbarkeit der P-Reihen)

Sei  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ,  $a_k \in \mathbb{C}$ , Konvergenzradius  $R > 0$ .

Dann ist die Funktion  $P: (-R, R) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $P = P(x)$ ,  
stetig differenzierbar, und es gilt:

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \forall x \in (-R, R)$$

Hinweis Es folgt  $P \in C^{\infty}((-R, R))$

Beweis Sei  $p \in (0, R)$ .

$\Rightarrow P_k(x) \rightarrow P(x)$  gleichmäßig auf  $(-p, p)$ .

Lemma  $\Rightarrow P'_k(x) \rightarrow Q(x)$  gleichmäßig auf  $(-p, p)$

$\Rightarrow P' = Q$ , und  $P \in C^1(-p, p)$ .

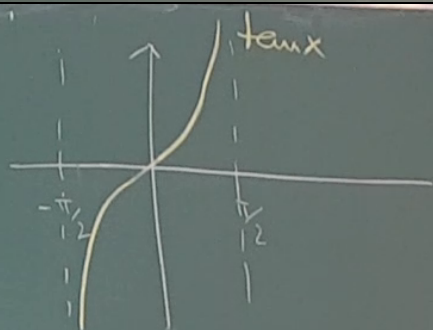
### Beispiel

$$\frac{d}{dx} \log(1+x) = \frac{1}{\underbrace{1+x}_{=1-(-x)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k =: Q(x).$$

Es gilt  $P'(x) = Q(x)$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ . (Konvergenzradius  $R=1$ )

Für  $x=0$  ist  $\log(1+x) = 0 = P(0)$ .

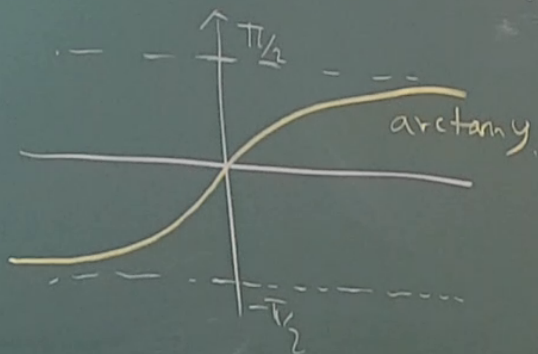
$$\Rightarrow \log(1+x) = P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$$



### Beispiel $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\tan' = \left( \frac{\sin}{\cos} \right)' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

$$\frac{d}{dy} \arctan(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{\underbrace{1+y^2}_{=1-(-y^2)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^{2k} =: Q(y)$$



Es gilt  $P' = Q$  mit  $P(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{2k+1}$ .

$$\arctan(0) = 0 = P(0)$$

$$\Rightarrow \arctan(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{2k+1} = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - + \dots$$

$$y \in (-1, 1)$$

$$x \rightarrow 1:$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

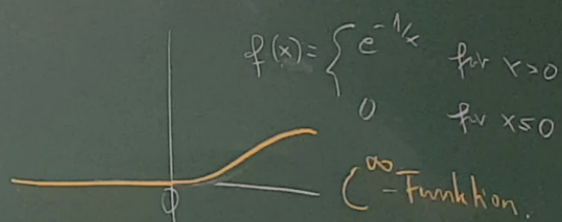
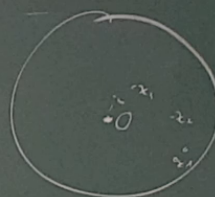
$$y \rightarrow 1: \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots$$

Satz (Identitätssatz)

Sei  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  Potenzreihe mit  $R > 0$

Ist  $0 \in \mathbb{C}$  Häufungspkt von  $\{z \in B_R(0) : P(z) = 0\}$  (d. h. es gibt  $z_i \neq 0$  mit  $z_i \rightarrow 0$ , so dass  $P(z_i) = 0$ ).

$\Rightarrow a_k = 0$  für alle  $k$ .



kann nicht durch P-Reihe dargestellt werden!