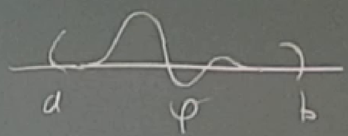
Satz (Fundamentallemma der VR)

Sei $f \in C^0(I,\mathbb{R}^n)$, $I=(a,b)$, mit

$$\int_I \langle f,\varphi\rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I,\mathbb{R}^n)$$

kompakter Träger

$\Longrightarrow$ f ist die Nullfunktion.

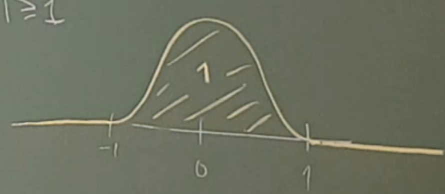


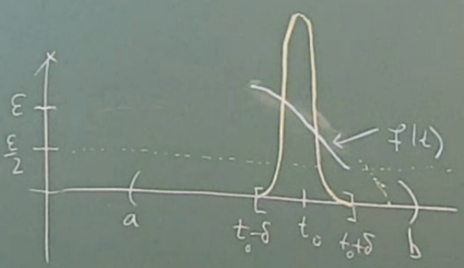
$\operatorname{spt}\varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}} \subset I$ kompakt

Beweis Sei zunächst $n=1$. Es gibt Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

- $\eta(s) = 0$ für $|s| \geq 1$
- $\eta \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}} \eta(s)\,ds = 1$.

zB $\eta(s) = \begin{cases} a \exp \frac{1}{s^2-1} & \text{für } |s|<1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$





$[t_0-\delta, t_0+\delta] \subset I$

Angenommen es gibt ein $t_0 \in (a,b)$ mit $\varepsilon := f(t_0) > 0$.

Betrachte reskalierte Funktion $\varphi(t) = \frac{1}{\delta}\,\eta\left(\frac{t-t_0}{\delta}\right)$

Es folgt $\varphi(t) = 0$ für $|t-t_0| \geq \delta \Rightarrow \varphi \in C_c^\infty(I)$

Nach Voraussetzung

$$0 = \int_I f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \underbrace{f(t)}_{\geq \frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{\varphi(t)}_{\geq 0}\,dt \geq \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t)\,dt}_{=1} > 0$$

, Widerspruch.

Jetzt: $f : I \to \mathbb{R}^n$

Für $\varphi \in C_c^\infty(I)$ und $1 \leq k \leq n$ folgt

$$0 = \int_I \langle f, \varphi e_k \rangle = \int_I f_k \varphi$$

$\Rightarrow f_k$ ist Nullfkt.

$\Rightarrow f$ ist Nullfkt. ☒

Anwendung $I = [a,b]$

$$\mathcal{F}(u) = \int_I f(t, u(t), u'(t))\,dt$$

$\mathcal{F} : C^1(I, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ (Variationsintegral / Funktional)

SATZ $\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow L_f(u) = D_x f(\cdot, u, u') - \frac{d}{dt} D_z f(\cdot, u, u') = 0.$$

Wir hatten schon

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_I \langle L_f(u), \varphi \rangle \overset{\text{Vor}}{=} 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n)$$

FLVR $\Rightarrow L_f(u) = 0$. ☒