

Diffeomorphismen. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $U \subset \mathbb{R}^n$

Grundproblem: Lösung einer Gleichung $f(x) = y$

Lineare Algebra: $f(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(1) Gleichung ist für alle $y \in \mathbb{R}^m$ lösbar

$$\Leftrightarrow \text{rang } A = m$$

(2) Gleichung hat höchstens eine Lösung

$$\Leftrightarrow \ker A = \{0\} \Leftrightarrow \text{rang } A = n$$

(3) Allgemein: ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Lösung von $f(x) = y_0$, so ist die Menge aller (sg. $f^{-1}\{y_0\}$) $= x_0 + \ker A$

Das ist ein (affiner) UR der Dimension $n - \text{rang}(A)$.

Sei nun $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Zu $y_0 \in \mathbb{R}^m$ sei $x_0 \in U$ gegeben mit $f(x_0) = y_0$.

Fragen:

(1) Gibt es für alle y nahe y_0 eine Lösung
 x nahe x_0 von $f(x) = y$?

(2) Ist x_0 die einzige Lösung von $f(x) = y_0$
nahe bei x_0 ?

(3) Falls nicht, wie sieht Lösungsmenge $f^{-1}\{y_0\}$ nahe bei x_0 aus?

Definition Eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ (mit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen) heißt Diffeomorphismus der Klasse C^r mit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} sind r -mal stetig differenzierbar.

(Homöomorphismus: f, f^{-1} stetig)

Beispiel $f \in C^1(I)$, $I = (a, b)$, mit $f' > 0$ auf I .

$\Rightarrow f$ streng monoton wachsend

$\Rightarrow f$ bildet I auf offenes Intervall J ab. (ZWS)

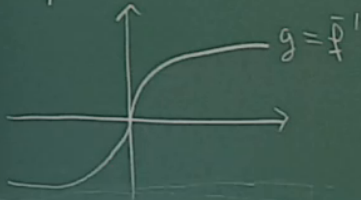
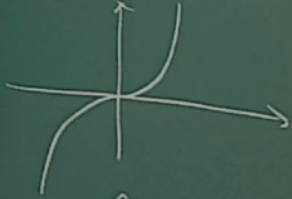
Sei $g: J \rightarrow I$ Umkehrfkt. $g' = \frac{1}{f' \circ g}$ stetig.

$\Rightarrow f: I \rightarrow J$ ist C^1 -Diffeomorphismus.

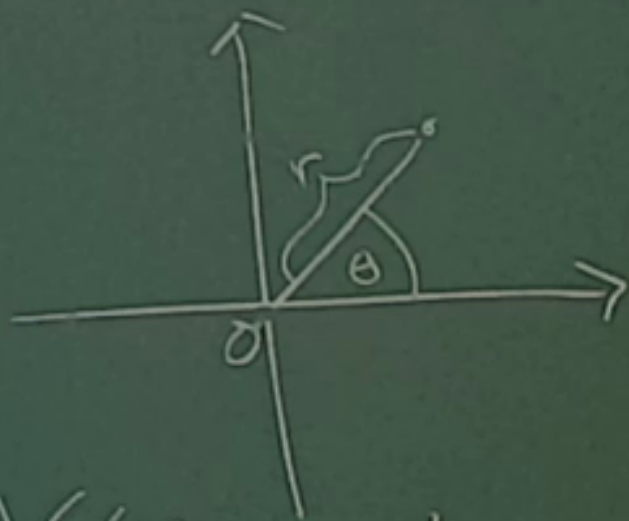
Bem. Ist $f: I \rightarrow J$ ein C^1 -Diffeo, mit $g = f^{-1}$, so folgt

$$\Rightarrow g(f(x)) = x \Rightarrow g'(f(x)) f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) \neq 0.$$

$$f(x) = x^3 \quad f'(0) = 0$$



Beispiel Polarkoordinaten



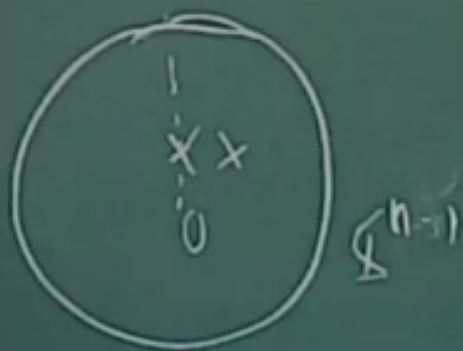
$$\varphi: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

ist ein C^1 -Diffeomorphismus.

Beispiel $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$x \frac{x}{|x|^2}$ $f(x) = \frac{x}{|x|^2}$ Umkehrabb. $f(x) = \frac{x}{|x|^2}$



$$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{|x|^2}}{\left|\frac{x}{|x|^2}\right|^2} = x$$

ist Reflex.

Lemma (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f: U \rightarrow V$ bijektiv mit Umkehrabb. $g: V \rightarrow U$
wobei $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Ist f in $x_0 \in U$ differenzierbar
und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar

so ist $Df(x_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ invertierbar

(insbesondere muss $m = n$ sein) Weiter

$$Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1} \quad (y_0 = f(x_0))$$

Beweis Kettenregel

$$g(f(x)) = x \Rightarrow Dg(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0}) Df(x_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

$$f(g(y)) = y \Rightarrow Df(\underbrace{g(y_0)}_{=x_0}) Dg(y_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$$

$$\Rightarrow Df(x_0) \text{ invertierbar, und } Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1}. \quad \square$$

Lemma (Höhere Ableitungen der Umkehrfkt.)

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f: U \rightarrow V$ bijektiv.

Sei $f \in C^r(U, V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,
und ist $g = f^{-1}: V \rightarrow U$ differenzierbar,
so folgt $g \in C^r(V, U)$.

Beweis Nach Lemma oben ist $Df(x_0)$ invertierbar, und

$$Dg = (Df)^{-1} \circ g.$$

Beweis Nach Lemma oben ist $Df(x_0)$ invertierbar, und

$$Dg = (Df)^{-1} \circ g$$

Cramersche
Regel

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_j} = (-1)^{i+j} \frac{M_{ji}(Df)}{\det Df} \circ g$$

$$\left(\frac{M_{ji}(Df)}{\det Df} \right) \circ g$$

$M_{ji}(A)$ = Determinante der
Matrix, die sich durch
Streichen der j -ten Zeile
und i -ten Spalte ergibt

Induktion über $r \in \mathbb{N}$

$r=1$: $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}$ ist stetig, also $g \in C^1$

$r-1 \rightarrow r$: $\frac{\partial g_i}{\partial y_j} \in C^{r-1} \Rightarrow g \in C^r$ 

Zur Existenz der Lösung

Definition • metrischer Raum (X, d)

• Cauchyfolge: $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ für $k, l \geq k(\varepsilon)$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon)$:

• vollständiger metr. Raum:

Jede Cauchyfolge konvergiert.

Satz Sei (X, d) vollständiger metr. Raum.

Sei $F: X \rightarrow X$ eine Kontraktion:

es gibt ein $\theta \in [0, 1)$ mit

$$d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Dann hat F einen Fixpunkt:

$\exists$ genau eine $x \in X$ mit $F(x) = x$.

Beweis

Eindeutigkeit: Sei $F(x) = x$ und $F(y) = y$

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq \underbrace{\Theta}_{\geq 0} d(x, y)$$

$$\Rightarrow d(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

Existenz: Definiere rekursiv eine Folge

$x_{n+1} = F(x_n)$, Startwert $x_0 \in X$ beliebig

Es folgt: $d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \Theta d(x_n, x_{n-1})$
 $\uparrow$
 $n \geq 1$

Stelle Sprünge eines $\hookrightarrow$ vor, die
immer kürzer werden. Wie weit kann er kommen?

Es gilt: $d(x_{n+1}, x_n) \leq \Theta^n d(x_1, x_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(x_n, x_0) &\leq \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \Theta^j d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{1}{1-\Theta} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Jetzt fasse x_n als Startwert auf (statt x_0). Für $m \geq n$:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-\Theta} d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\Theta^n}{1-\Theta} d(x_1, x_0).$$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist Cauchyfolge, konvergiert gegen ein $x \in X$.

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$$

$\nexists$ Lipschitzstetig

