Satz (über inverse Funktionen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar, so gibt es eine offene Umgebung U von x_0 mit:

(a) $V = f(U)$ ist offene Umgebung von $y_0 := f(x_0)$

(b) $f|_U : U \to V$ ist ein C^1-Diffeomorphismus.

Zusatz Ist $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann ist $g = (f|_U)^{-1} \in C^r(V, \mathbb{R}^n)$

BEWEIS in 3 Schritten.

Schritt 1 Formulierung als Fixpunktproblem.

Schreibe
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{=:y_0} + \underbrace{Df(x_0)}_{=:A}(x - x_0) + R_f(x)$$

$$f(x) = y \iff A(x - x_0) + R_f(x) = y - y_0$$
$$\iff x = \underbrace{x_0 + A^{-1}(y - y_0 - R_f(x))}_{=:\Phi_y(x) \text{ für } x \in \Omega}.$$

$$\boxed{f(x) = y \iff \Phi_y(x) = x.}$$

Schritt 1 Konstruktion des Fixpunkts

Setze $\Lambda = |A^{-1}| \in (0,\infty)$. Es gilt

$DR_f(x) = Df(x) - A$ stetig, $DR_f(x_0) = 0$.

Für $\delta \leq \delta_0$ gilt

$$\overline{B_\delta(x_0)} \subset \Omega \text{ und } |DR_f(x)| \leq \frac{1}{2\Lambda} \text{ für } x \in \overline{B_\delta(x_0)}$$

Schrankensatz:

$$x_1, x_2 \in \overline{B_\delta(x_0)} \Rightarrow |R_f(x_1) - R_f(x_2)| \leq \frac{1}{2\Lambda} |x_1 - x_2|$$

$$\Rightarrow |\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| = |A^{-1}(R_f(x_1) - R_f(x_2))| \leq \Lambda |R_f(x_1) - R_f(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|.$$

$$|\phi_y(x) - x_0| = |A^{-1}(y - y_0 - R_f(x))| \qquad (x \in \overline{B_\delta(x_0)})$$

$$\leq \Lambda |y - y_0| + \Lambda |R_f(x) - \underbrace{R_f(x_0)}_{=0}|$$

$$\leq \Lambda |y - y_0| + \frac{1}{2} \underbrace{|x - x_0|}_{\leq \delta}$$

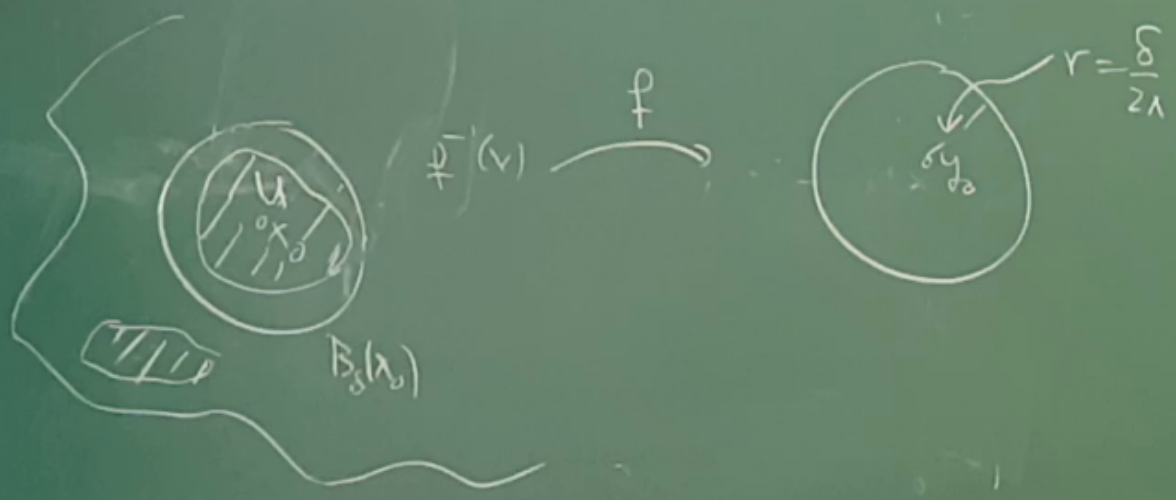
Also: $|y - y_0| < \frac{\delta}{2\Lambda} \Rightarrow |\phi_y(x) - x_0| < \delta$

FAZIT: Für $y \in B_{\frac{\delta}{2\Lambda}}(y_0)$ ist $\phi_y : \overline{B_\delta(x_0)} \to \overline{B_\delta(x_0)}$ eine Kontraktion mit Faktor $\frac{1}{2}$ (hier $\delta \leq \delta_0$)

Es gibt genau ein $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ mit $\phi_y(x) = x$, bzw $f(x) = y$

Sogar $|x - x_0| = |\phi_y(x) - x_0| < \delta$, also $x \in B_\delta(x_0)$

Wähle jetzt $V = B_{\frac{\delta}{2\Lambda}}(y_0)$ und $U = f^{-1}(V) \cap B_\delta(x_0)$



<u>Schritt 3</u> Differenzierbarkeit von $g = (f|_U)^{-1}$.

g ist stetig in y_0:

$$|g(y) - \underbrace{g(y_0)}_{=x_0}| = |\phi_y(g(y)) - x_0|$$

$$\leq \Lambda|y - y_0| + \frac{1}{2}|g(y) - x_0|$$

$$\Rightarrow |g(y) - \underbrace{g(y_0)}_{=x_0}| \leq 2\Lambda|y - y_0| \longrightarrow 0 \text{ mit } y \to y_0.$$

<u>Zeige</u>: $Dg(y_0) = A^{-1}$

$$\frac{\left| g(y) - \left(g(y_0) + A^{-1}(y-y_0) \right) \right|}{|y-y_0|}$$

$$= \frac{\left| \Phi_y(g(y)) - x_0 - A^{-1}(y-y_0) \right|}{|y-y_0|}$$

$$= \frac{\left| A^{-1} R_f(g(y)) \right|}{|y-y_0|} \leq \Lambda \frac{|R_f(g(y))|}{|g(y)-x_0|} \frac{|g(y)-x_0|}{|y-y_0|}$$

$$= \Lambda \underbrace{\frac{|R_f(x)|}{|x-x_0|}\Bigg|_{x=g(y)}}_{\xrightarrow{y \to y_0} \to 0} \underbrace{\frac{|g(y)-x_0|}{|y-y_0|}}_{\leq 2\Lambda} \to 0.$$

Differenzierbarkeit von g auf ganz V:

Sei jetzt $\delta > 0$ so klein, dass

$$\det Df(x) \neq 0 \text{ für alle } x \; B_\delta(x_0)$$

Die Voraussetzungen des Satzes gelten für $f|_U \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $x = g(y)$.

Wie bewiesen gibt es $\tilde{U}$ Umgb von x und $\tilde{V}$ Umgb. von y mit

- $f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ bijektiv
- $\tilde{g} = (f|_{\tilde{U}})^{-1}$ differenzierbar in y.

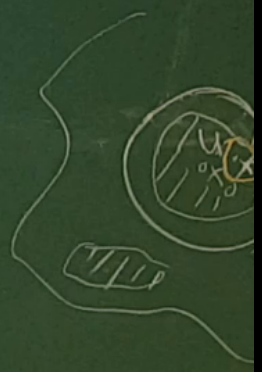
$\boxed{\Rightarrow g \text{ differenzierbar in } y}$

Aber $\tilde{g} = g|_V$, da $f|_U$ injektiv $\square$

Wähle

Bemerkung 1 $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in \Omega$.

$\Rightarrow f(\Omega)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$.



Bemerkung $\exp: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy)$

$$= (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

$$D\exp(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$\det D\exp(x,y) = e^{2x} > 0$.

Aber $\exp: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv

$\exp(x, y+2\pi) = \exp(x,y)$.