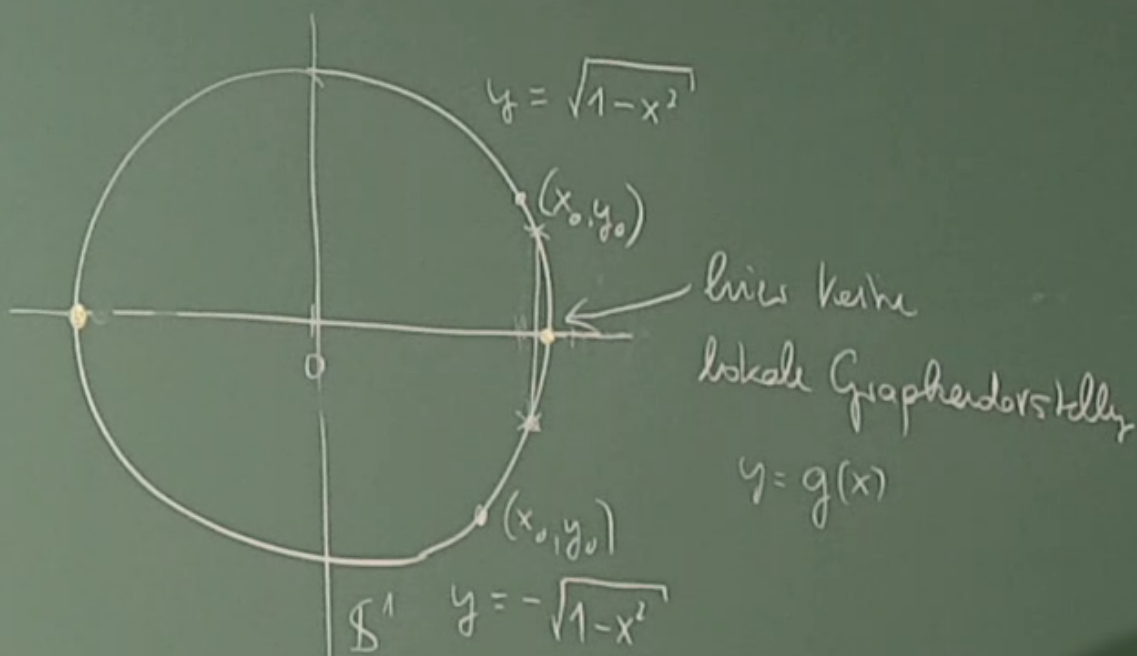


Implizite Funktionen

$$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k), \quad f = f(x, y) \quad \text{mit} \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$$

- Sei eine Lösung $f(x_0, y_0) = z_0$ gegeben. Wie sieht die Lösungsmenge $\{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = z_0\}$ nahe bei (x_0, y_0) aus?
- Können wir die Gleichung nach y eindeutig auflösen, also die Lösungsmenge lokal als Graph $y = g(x)$ schreiben?

Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2 = 1, \quad k=1, m=1, (x, y) \in \mathbb{R}^2$



Beispiel lineare Funktion in 2 Variablen:

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = ax + by \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$f(x, y) = z_0 \text{ nach } y \text{ auflösbar} \Leftrightarrow b \neq 0$$

$$\text{Lösungsfunktion } g(x) = \frac{1}{b}(z_0 - ax).$$

in bel. Dimensionen:

$$f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ linear, bel Matrix in } \mathbb{R}^{k \times (m+l)}$$

$$\text{Schreibe Matrix als } (A, B) \in (\mathbb{R}^{k \times m}, \mathbb{R}^{k \times l})$$

$$\Rightarrow f(x, y) = Ax + By$$

Gleichung $f(x, y) = z_0$. bel z_0 und $x \in \mathbb{R}^m$ fest
eine eindeutige Lösung y .

$$\Leftrightarrow B \text{ invertierbar (det } B \neq 0)$$

$$\text{und zwar: } y = B^{-1}(z_0 - Ax).$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ offen.

$$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k), \quad f = f(x, y)$$

$$Df(x, y) = \left(D_x f(x, y), D_y f(x, y) \right)$$

$\in \mathbb{R}^{m \times k} \qquad \qquad \in \mathbb{R}^{l \times k}$

Zur Auflösbarkeit müssen wir annehmen:

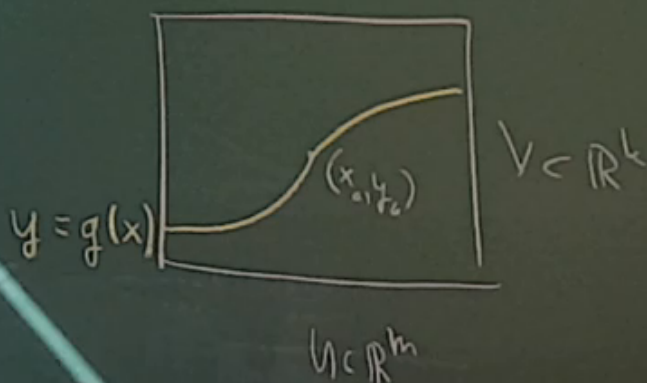
$$D_y f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad \underline{\text{invertierbar}}$$

Fall $k=1$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$

Satz (implizite Fkt. (Jordan))

Gegeben Lösung $f(x_0, y_0) = z_0$, und es gelte $D_y f(x_0, y_0)$ invertierbar

$\Rightarrow$ Es gibt offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^m$ von x_0 , $V \subset \mathbb{R}^k$ von y_0 , und $g \in C^1(U, V)$ mit

$$\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = z_0\} = \{(x, g(x)) : x \in U\}$$


Es folgt $g(x_0) = y_0$, und $Dg(x_0) = - \underbrace{D_y f(x_0, y_0)^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{k \times m}} \underbrace{D_x f(x_0, y_0)}_{\in \mathbb{R}^{k \times k}}$

Zusatz. $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
 $\Rightarrow g \in C^r(U, \mathbb{R}^k)$

Beweis (durch Reduktion auf den Satz über inversen Fkt.-Satz)

Betrachte. $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k)$, $F(x, y) = (x, f(x, y))$

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ D_x f(x, y) & D_y f(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\det DF(x_0, y_0) = \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0$$

C für

$$\det \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \varphi(D)$$

$$\varphi(E_R) = 1$$

Umkehrsatz: $\exists$ offene Umgebungen U_0 von x_0 , V von y_0 , und W von (x_0, z_0) ,
so dass $F: U_0 \times V \rightarrow W$ Diffeomorphismus ist.
Sei $G = F^{-1}: W \rightarrow U_0 \times V$.

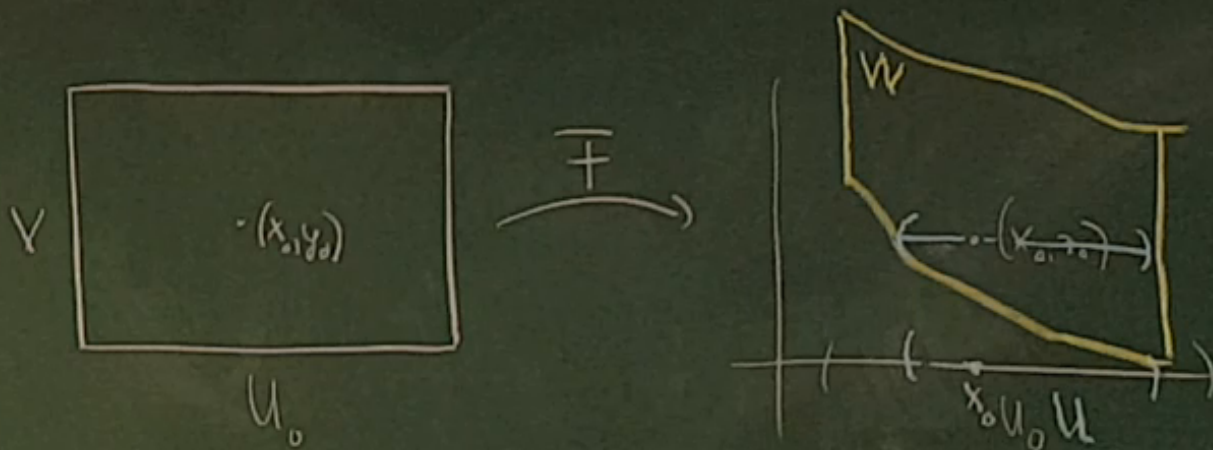
Es gilt für $(x, z) \in W$: $(x, z) = F(x, y) = (x, f(x, y))$ mit $(x, y) \in U_0 \times V$.

$$\Rightarrow G(x, z) = G(F(x, y)) = (x, y).$$

Also hat G folgende Form: $G(x, z) = (x, g_0(x, z))$ mit $g_0 \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$

Sei $U = \{x \in U_0 : (x, z_0) \in W\}$

U ist offen, da W offen.



$$x_0 \in U \text{ da } (x_0, z_0) \in F(x_0, y_0) \in W$$

Für $(x, y) \in U \times V$ gilt:

$$f(x, y) = z_0 \Leftrightarrow F(x, y) = (x, z_0)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = G(x, z_0) \quad (\text{da } (x, z_0) \in W)$$

$$\Leftrightarrow y = g_0(x, z_0).$$

Der Satz gilt mit Graphenabb. $g(x) = g_0(x, z_0) \quad (x \in U)$

Formel für die Ableitung:

$$f(x, g(x)) = z_0 \xRightarrow{\text{Kettenregel}} D_x f(x_0, g(x_0)) + \underbrace{D_y f(x_0, g(x_0))}_{\text{invertierbar}} Dg(x_0) = 0$$



2 Beispiele

1. Nullstellen einer quadratischen Gleichung

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(p, q, \lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = \left(\lambda + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$$

$$N = \left\{ (p, q, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : f(p, q, \lambda) = 0 \right\}$$

$$\text{Sei } (p_0, q_0, \lambda_0) \in N: 0 = \left(\lambda_0 + \frac{p_0}{2}\right)^2 = \frac{p_0^2}{4} - q_0$$

$$\text{Fall 1 } \frac{p_0^2}{4} - q_0 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2\left(\lambda_0 + \frac{p_0}{2}\right) \neq 0$$

IFS: $\exists$ lokal eindeutige Auflösung $\lambda = \lambda(p, q)$

hierlich $\lambda(p, q) = \begin{cases} -\frac{p_0}{2} + \sqrt{\frac{p_0^2}{4} - q_0} & \text{falls } \lambda_0 > -\frac{p_0}{2} \\ -\frac{p_0}{2} - \sqrt{\frac{p_0^2}{4} - q_0} & \text{falls } \lambda_0 < -\frac{p_0}{2} \end{cases}$

Fall 2 $\frac{p_0^2}{4} - q_0 = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0) = 0$

IFS nicht anwendbar.

Beispiel Betrachte jetzt

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(b, \lambda) = \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0$

Frage: wie hängen Nullstellen von den Koeffizienten b_i ab?

Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ einfache Nullstelle: $f(a, \lambda_0) = 0$

$\Rightarrow f(a, \lambda) = (\lambda - \lambda_0) q(\lambda)$ mit Polynom $q(\lambda)$, wobei $q(\lambda_0) \neq 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0) = q(\lambda_0) \neq 0$

IFS: es gibt auf Umgebung $U \times V$ von (a, λ_0) eine Auflösungsfunktion $\lambda = \lambda(b)$, also $f(b, \lambda(b)) = 0$.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_i}(a) = - \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0) \right)^{-1} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial b_i}(a)}_{-\lambda_0^i}$$

$$= \frac{\lambda_0^i}{n \lambda_0^{n-1} + (n-1) a_{n-1} \lambda_0^{n-2} + \dots + a_1}$$