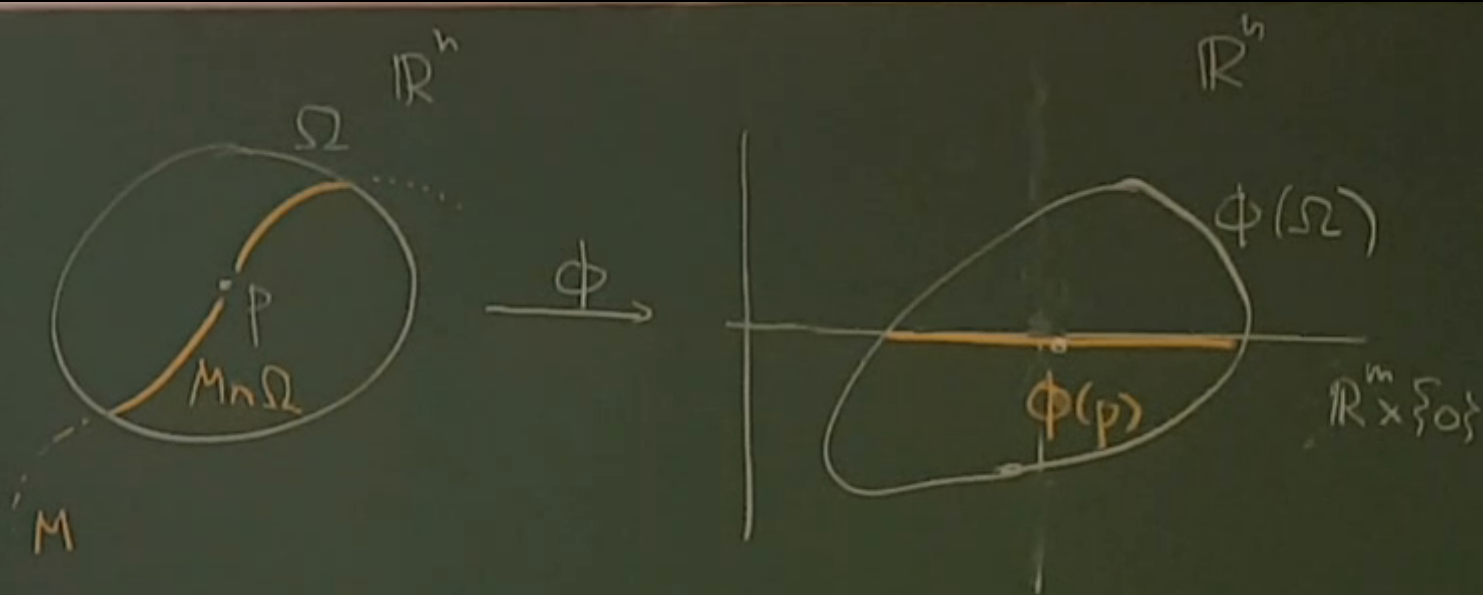


Untermannigfaltigkeiten

Definition Sei $1 \leq m \leq n$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m -dim. Umfk des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^1 (*) falls gilt:
In jedem $p \in M$ gibt es offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^1 Diffeomorphismus $\phi: \Omega \rightarrow \phi(\Omega)$ mit

$$\phi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(\Omega).$$

(*) allgemeiner Klasse C^r mit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$



- Man nennt ϕ eine (lokale) Plättung von M

Satz (Untermannigfaltigkeitskriterien)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $n = m + k$. Dann sind äquivalent:

(1) M ist m -dim. Umfk des $\mathbb{R}^n$.

(2) Niveaumengenkriterium: In jedem $p \in M$ gibt es offene Umgebung Ω und eine Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ so dass

$$M \cap \Omega = f^{-1}\{0\} \text{ und } \text{rang } Df(p) = k.$$

(3) Graphenkriterium

In jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ und $g \in C^1(U, V)$ so dass

(nach geeigneter Vertauschung der Koordinaten)

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}$$

Beweis: Zeige $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$: Sei $\phi: \Omega \rightarrow \phi(\Omega)$ lokale Plättung bei $p \in M$
 Sei $\pi_2: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\pi_2(x, y) = y$.

Setze $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f = \pi_2 \circ \phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$

$$\Rightarrow f^{-1}\{0\} = \phi^{-1}(\underbrace{\pi_2^{-1}\{0\}}_{= \mathbb{R}^m}) = \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \cap \phi(\Omega)) = M \cap \Omega$$

Kettenregel

$$Df(p) = \pi_2 \circ D\phi(p)$$

$$\text{rang } Df(p) \stackrel{\text{ISO}}{=} \text{rang } \pi_2 = k$$

$(2) \Rightarrow (3)$: Nach Vertauschung der Koordinaten

gilt: $D_y f(p) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertierbar,
 wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$.

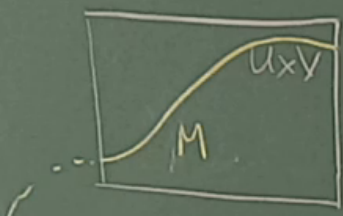
$\mathbb{R}^{k \times m}$

$$Df(p) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \partial_1 f & \partial_2 f & \dots & \partial_n f \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad (n = m + k)$$

Wähle $i_1, \dots, i_k$ sodass $\partial_{i_1} f, \dots, \partial_{i_k} f$ lin. unabh.

Behauptung folgt aus IFS

$(3) \Rightarrow (1)$: Sei $M_n(U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}$ mit $g \in C^1(U, V)$.



Definiere Abbildung

$$\phi: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U \times \mathbb{R}^k, \phi(x, y) = (x, y - g(x))$$

ϕ ist Diffeomorphismus

$$\phi^{-1}: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U \times \mathbb{R}^k, \phi^{-1}(x, z) = (x, z + g(x))$$

$\Rightarrow \phi: U \times V \rightarrow \phi(U \times V)$ ist Diffeomorphismus

$$\phi(M_n(U \times V)) = \phi(\{(x, g(x)) : x \in U\}) = U \times \{0\},$$

□

Beispiel $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1\}$ ist eine m -dim. Umpfk.

$$S^m = f^{-1}\{0\} \text{ für } f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|^2 - 1.$$

$$Df(x) = 2x \neq 0 \text{ für alle } x \in S^m.$$

Niveaumengenkrit.

Definition $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor

einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ im Punkt $p \in M$, falls gilt:

$$\exists \delta > 0 \exists \gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v.$$

$$T_p M = \{\text{Menge aller Tangentialvektoren von } M \text{ in } p\}$$

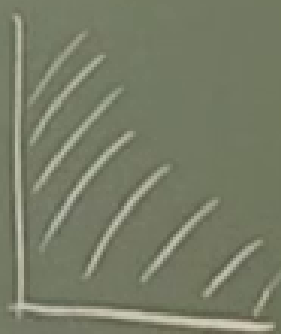
Fakten: $0 \in T_p M$ (wähle $\gamma(t) = p \quad \forall t$)

$$v \in T_p M, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in T_p M \quad (\text{wähle } \gamma_\lambda(t) = \gamma(\lambda t))$$

Beispiel $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

$$+ T_0 M = M.$$

(UA) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$



$$T_0 M = \{0\}.$$

Folgerung Sei M eine m -dim. C^1 Umfkh des $\mathbb{R}^n$, und $n = m + k$.
Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $M \cap \Omega = f^{-1}\{0\}$.
Dann gilt:

Für $p \in M \cap \Omega$ mit $\text{rang } Df(p) = k$ folgt $T_p M = \ker Df(p)$.

Insbesondere ist $T_p M$ ein Unterraum der Dimension m .

Beweis Sei $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$.

Es gilt

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = Df(p)v.$$

$$\Rightarrow \boxed{T_p M \subset \ker Df(p)}$$

→ Graphenkriterium: $\exists U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ offen
 $g \in C^1(U, V)$

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}$$

gilt noch
Vertauschung
der Koord.

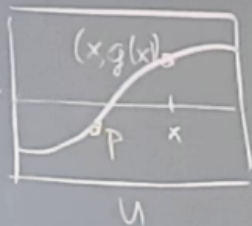
Betrachte Graphenabbildung $G \in C^1(U, \mathbb{R}^n), G(x) = (x, g(x))$

Es gelte $p = \underbrace{(x_0, g(x_0))}_{= G(x_0)}$. Sei $a \in \mathbb{R}^m$ gegeben.

$$T_p M \ni \left. \frac{d}{dt} \underbrace{G(x_0 + ta)}_{\in U} \right|_{t=0} = DG(x_0)a$$

Kurve in M , bei p für $t=0$

$$\boxed{\text{Bild } DG(x_0) \subset T_p M}$$



Dimensionsargument:

$$DG(x_0)a = (a, Dg(x_0)a)$$

$\Rightarrow DG(x_0)$ injektiv

$\Rightarrow \dim \text{Bild } DG(x_0) = m$

$$\dim \ker Df(p) = n - k = m.$$

insgesamt:

$$\underbrace{\text{Bild } DG(x_0)}_{\dim m} \subset \underbrace{T_p M}_{\dim m} \subset \underbrace{\ker Df(p)}_{\dim m} \Rightarrow \text{Gleichheit.} \quad \square$$

Satz (Lagrange Multiplikatorenregel)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi \in C^1(\Omega)$

Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$

φ habe in p ein Minimum unter der

Nebenbedingung $f = z_0$, d.h.

- $f(p) = z_0$

- $\varphi(p) \leq \varphi(q)$ für alle $q \in \Omega$ mit $f(q) = z_0$.

Ist $\text{rang } Df(p) = k$, so gibt es

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$\text{grad } \varphi(p) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad } f_i(p).$$

Beweis

o Bd A $\text{rang } Df = k$ auf ganz Ω

wähle $i_1, \dots, i_k$ mit $\det (\partial_{i_1} f, \dots, \partial_{i_k} f)(p) \neq 0$
verkleinere Ω .
 $\in \mathbb{R}^{k \times k}$

Es folgt: $M = f^{-1}\{z_0\}$ ist eine m -dim Umfk (wobei $m = n - k$)

Sei $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$

$$0 = \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = D\varphi(p)v = \langle \text{grad } \varphi(p), v \rangle.$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{grad } \varphi(p) \in (T_p M)^\perp}$$

Analog folgt $\text{grad } f_i(p) \in (T_p M)^\perp$ für $i=1, \dots, k$.

Wir behaupten

$$(T_p M)^\perp = \text{Span} \{ \text{grad } f_i(p), 1 \leq i \leq k \}. \quad (\Rightarrow \text{Satz}).$$

Dimensionsargument.

$$\dim (T_p M)^\perp = n - \underbrace{\dim T_p M}_{=m} = k.$$

$$\text{rang } Df(p) = k \Rightarrow \underbrace{\text{grad } f_i(p), 1 \leq i \leq k}_{= i\text{-te Zeile von } Df(p)}, \text{ sind linear unabhängig.}$$

Beispiel $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrix

$$\varphi(x) = \langle Bx, x \rangle \quad \text{unter NB} \quad f(x) = |x|^2 = 1.$$

Minimum von φ unter NB wird angenommen.

Sei $v \in S^{n-1}$ Minimalstelle

$$\Rightarrow \text{grad } \varphi(v) = \lambda \text{ grad } f(v) \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\cancel{2} Bv = \lambda \cancel{2} v$$

v Eigenvektor.