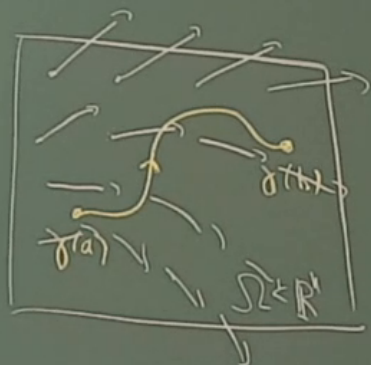


Kurvenintegrale und Stammfunktionen.

Definition (Kurvenintegral) Sei $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Für $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$ setzen wir

$$\int_{\gamma} F \cdot dx := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$



γ
↑
symbolische
Notation

← Riemann-
Integral



$PC^1 = \text{stückweise } C^1$

$\exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq b: \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^1$
(γ automatisch stetig auf $[a, b]$)

Physik: F Kraftvektorfeld (" $F = \text{force}$ ")
 dx Wegelament (vektoriell)

Arbeit = Kraft längs Weg.

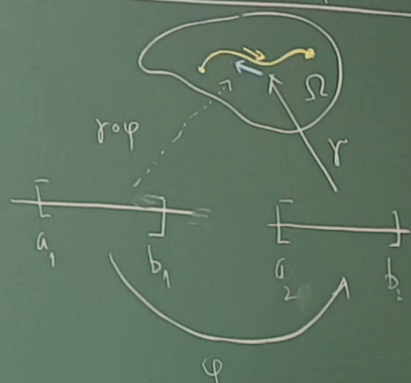
Eigenschaften des Kurvenintegrals

(a) Linearität:
$$\int_{\gamma} (\lambda F + \mu G) \cdot dx = \lambda \int_{\gamma} F \cdot dx + \mu \int_{\gamma} G \cdot dx$$

(b) Additivität bzgl. Zerlegungen: Sei $\gamma \in PC^1([0, b], \Omega)$ und $a = t_0 < \dots < t_N = b$ beliebige Zerlegung. Dann

$$\int_{\gamma} F \cdot dx = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} F \cdot dx \quad \text{mit } \gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$$

Invarianz gegenüber Umparametrisierungen



Beweis

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot dx &= \int_{a_1}^{b_1} \langle F(\gamma \circ \varphi(t)), (\gamma \circ \varphi)'(t) \rangle dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \langle (F \circ \gamma)(\varphi(t)), \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) \rangle dt \\ &\stackrel{\text{(Substitutionsregel)}}{=} \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} \langle (F \circ \gamma)(s), \gamma'(s) \rangle ds = \pm \int_{a_2}^{b_2} \langle F(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds = \pm \int_{\gamma} F \cdot dx \end{aligned}$$

$\varphi(t) = s$

wenn $\varphi(a_1) = a_2, \varphi(b_1) = b_2$

wenn $\varphi(a_1) = b_2, \varphi(b_1) = a_2$

□

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ heißt konservativ (oder Gradientenfeld), wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt mit

$$F = \text{grad } \varphi \text{ auf } \Omega \quad (\Leftrightarrow F_j = \partial_j \varphi \text{ für } j=1, \dots, n).$$

Die Funktion φ heißt Stammfunktion oder Potential von F .

Bemerkung Ist Ω zusammenhängend, so unterscheiden sich zwei Stammfunktionen nur um eine (additive) Konstante.

$$\text{grad}(\varphi_2 - \varphi_1) = \underbrace{\text{grad } \varphi_2}_{=F} - \underbrace{\text{grad } \varphi_1}_{=F} = 0, \text{ also } \varphi_2 - \varphi_1 = C \text{ (konst.)}, \text{ bzw. } \varphi_2 = \varphi_1 + C$$

Lemma Sei Ω offen und zusammenhängend.

Für ein $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:

(a) F ist ein Gradientenfeld.

(b) Für jede geschlossene PC^1 -Kurve in Ω gilt $\int_{\gamma} F \cdot dx = 0$.

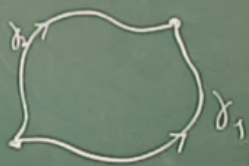
(c) Für zwei PC^1 -Kurven in Ω mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dx = \int_{\gamma_2} F \cdot dx,$$

Beweis (a) $\Rightarrow$ (b), + (c)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dx &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \text{grad } \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= \left[\varphi(x) \right]_{x=\gamma(a)}^{x=\gamma(b)} \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow \Omega$ ($i=1,2$), mit gleichen Anfangs-/Endpkt.



$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } a_1 \leq t \leq b_1 \\ \gamma_2(b_1+b_2-t) & b_1 \leq t \leq b_1+b_2-a_2 \end{cases}$$

$$0 = \int_{\gamma} F \cdot dx = \int_{\gamma|_{[a_1, b_1]}} F \cdot dx + \int_{\gamma|_{[b_1, b_1+b_2-a_2]}} F \cdot dx = \int_{\gamma_1} F \cdot dx - \int_{\gamma_2} F \cdot dx.$$

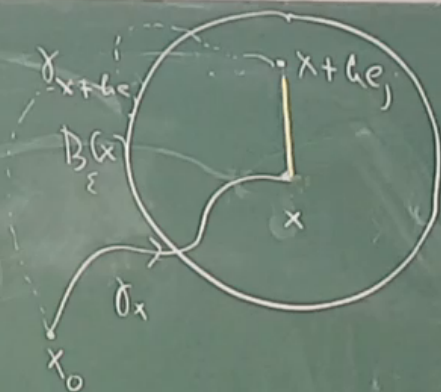
(c) $\Rightarrow$ (a): Sei $x_0 \in \Omega$. Zu $x \in \Omega$ wähle $\gamma_x \in PC([0,1], \Omega)$ mit $\gamma_x(0) = x_0$ und $\gamma_x(1) = x$.
(Existenz von γ_x nach 1A).

Wäre $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion von F mit $\varphi(x_0) = 0$, so wäre

$$\int_{\gamma_x} F \cdot dx = \varphi(x)$$



Idee: benutze diese Formel zur Definition einer Stammfunktion.



Zu $x \in \Omega$ wähle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$

Wähle $x + h e_j \in B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

Sei $c: [0,1] \rightarrow \Omega$, $c(t) = x + t h e_j$

$$\frac{\varphi(x + h e_j) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_c F \cdot dx \quad (\text{die Integrale über } \gamma_x \text{ heben sich weg})$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^1 \langle F(x + t h e_j), h e_j \rangle dt$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} F_j(x), \text{ also } \partial_j \varphi(x) = F_j(x)$$

□

Satz (Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern)

Ist $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld, so gilt

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n.$$

Wenn

Beweis $F = \text{grad } \varphi$, so ist $\varphi \in C^2(\Omega)$ und

SCHWARZ

$$\partial_i F_j = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_j F_i$$

Bem ($n=3$): $\text{rot } F = \left(\begin{matrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{matrix} \right)$

Beispiel

$$\vec{F}(x,y) = (-y, x)$$

$$\partial_1 \vec{F}_2 = 1 \quad \text{aber} \quad \partial_2 \vec{F}_1 = -1.$$

$\Rightarrow \vec{F}$ hat in keiner offenen Menge eine Stammfkt.

Beispiel $W: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad W(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

$$\partial_1 W_2 = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \stackrel{!}{=} \partial_2 W_1$$

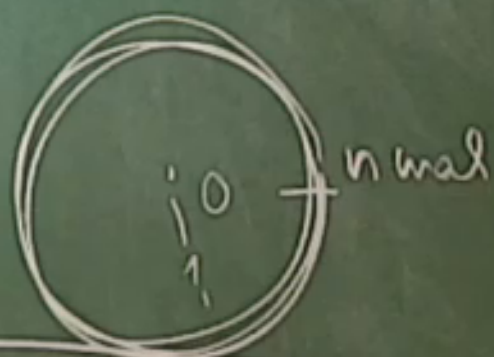
notwendige Bedingung am Satz ist erfüllt.

Sei $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Kurve in Polardarstellung: $\gamma(t) = r(t) (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} W \cdot dx &= \int_a^b \left\langle \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, r' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \theta(b) - \theta(a) \end{aligned}$$

Wähle speziell $[a, b] = [0, 2\pi]$

und $r(t) \equiv 1$ und $\theta(t) = nt$ mit $n \in \mathbb{Z}$



$$\boxed{\int_{\gamma} W \cdot dx = n \cdot 2\pi \neq 0 \text{ für } n \neq 0.}$$