

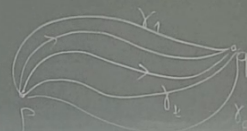
Kurvenintegrale II

Sei $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$: $\int_{\gamma} F \cdot dx$ wegunabhängig $\iff F$ hat eine Stammfunktion.

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \iff \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ F \text{ rotationsfrei: } \partial_i F_j = \partial_j F_i \text{ f\"ur } 1 \leq i, j \leq n \end{array}$$

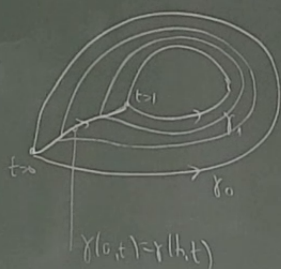
Definition Eine Homotopie in Ω zwischen $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([a, b], \Omega)$ ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([0, 1] \times [a, b], \Omega)$ mit $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0, \gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$.

- Homotopie mit festen Endpunkten: $\gamma(a, t) = p, \gamma(b, t) = q \quad \forall t \in [0, 1]$.



$$\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$$

- geschlossene Homotopie: $\gamma(a, t) = \gamma(b, t) \quad \forall t \in [0, 1]$



Lemma (Homotopieformel)

Sei $\gamma \in C^2([0, 1] \times [a, b], \Omega)$ eine Homotopie zwischen $\gamma_0 = \gamma(\cdot, 0), \gamma_1 = \gamma(\cdot, 1)$ entweder mit festen Anfangs-/Endpunkt oder geschlossen. Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dx - \int_{\gamma_0} F \cdot dx = \int_0^1 \int_a^b \sum_{i,j=1}^n (\partial_j F_i - \partial_i F_j) \circ \gamma \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial t} ds dt \quad (\gamma = \gamma(s, t))$$

Insbesondere F rotationsfrei $\implies$ Kurvenintegrale sind gleich.

Beweis Berechne für beliebige C^2 Homotopie mit $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} F \cdot dx = \frac{d}{dt} \int_a^b \left\langle \underbrace{F(\gamma_t(s))}_{= \gamma(s, t)}, \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \right\rangle ds$$

$$= \int_a^b \left(\left\langle D F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle + \left\langle F \circ \gamma, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} \right\rangle \right) ds$$

$$(\text{parallel Int.}) = \int_a^b \left(\left\langle D F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle - \left\langle D F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle \right) ds + \left[\left\langle F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle \right]_{s=a}^{s=b}$$

Randterme: $\gamma(a, t) = p, \gamma(b, t) = q \text{ fest} \implies \frac{\partial \gamma}{\partial t}(a, t) = 0, \frac{\partial \gamma}{\partial t}(b, t) = 0 \implies$ Randterm verschwindet.

$\gamma(a, t) = \gamma(b, t) \quad \forall t \implies \frac{\partial \gamma}{\partial t}(a, t) = \frac{\partial \gamma}{\partial t}(b, t) \implies$ Randterm hebt sich weg.

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Bem Polynom zerfällt in Linearfaktoren.

Beweis Wir betrachten das Vektorfeld $W(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Es gilt $\partial_1 W_2 = \partial_2 W_1$.

Sei $p(z) = z^n + \dots + a_1 z + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$.

Schreibe $p(z) = p_n(z) + q(z)$ mit $p_n(z) = z^n$.

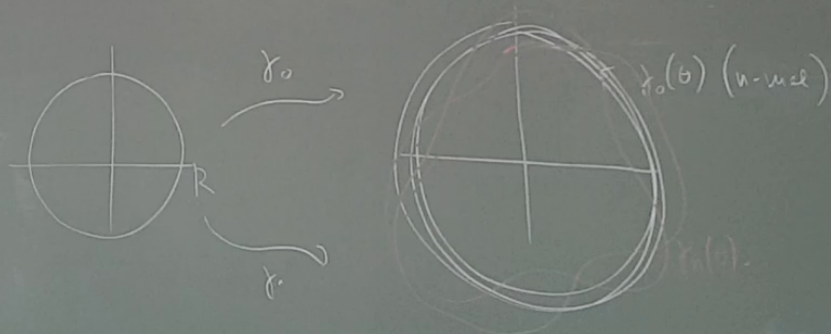
Dann gilt $q(z)/z^n \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, also

$$|q(z)| \leq \frac{1}{2} |z|^n \text{ für } |z| \geq R.$$

Betrachte die Homotopie $\gamma: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(\theta, t) = p_n(R e^{i\theta}) + t q(R e^{i\theta})$.

Es gilt $\gamma_0(\theta) = p_n(R e^{i\theta}) = R^n e^{in\theta}$

$$\gamma_1(\theta) = p_n(R e^{i\theta}) + q(R e^{i\theta}) = p(R e^{i\theta})$$



Beachte $|\gamma(\theta, t)| \geq |p_n(R e^{i\theta})| - |q(R e^{i\theta})| = R^n - \frac{1}{2} R^n > 0$.

$$\text{Homotopieformel } \int_{\gamma_1} W \cdot dx = \int_{\gamma_0} W \cdot dx = 2\pi n$$

Betrachte zweite Homotopie $\tilde{\gamma}: [0, 2\pi] \times [0, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma}(\theta, \rho) = p(\rho e^{i\theta})$.

Hätte p keine Nullstelle, so wäre $\tilde{\gamma}$ glatte Homotopie in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\rho = R: \tilde{\gamma}_R(\theta) = p(R e^{i\theta}) = \gamma_1(\theta)$$

$$\rho = 0: \tilde{\gamma}_0(\theta) = p(0) = \text{konstant.}$$

$$\text{Homotopieformel: } \int_{\gamma_1} W \cdot dx = \int_{\tilde{\gamma}_0} W \cdot dx = 0 \quad (= 2\pi n, \text{ Widerspruch}).$$

Satz (Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann ist äquivalent:

(a) F ist rotationsfrei: $\partial_i F_j = \partial_j F_i$

(b) Sind $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a,b], \Omega)$ homotop (mit festem Anfangs/Endpunkt) oder geschlossen

$$\Rightarrow \int_{\gamma_0} F \cdot dx = \int_{\gamma_1} F \cdot dx$$

Beweis (a) $\Rightarrow$ (b) Homotopieformel ✓

$$(b) \Rightarrow (a): \text{Wir haben } \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} F \cdot dx}_{=0 \text{ nach (b)}} = \int_a^b \langle (DF^T - DF) \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle ds$$

Sei $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ gegeben, wähle $\gamma_t = \gamma + t\phi$ mit $\phi \in C_c^\infty((a,b), \mathbb{R}^n)$

$$(t=0): 0 = \int_a^b \langle (DF^T - DF) \circ \gamma, \frac{d\gamma}{ds}, \phi \rangle ds$$

$$FLVR \Rightarrow (DF^T - DF) \circ \gamma \frac{d\gamma}{ds} = 0 \text{ auf } [a,b].$$

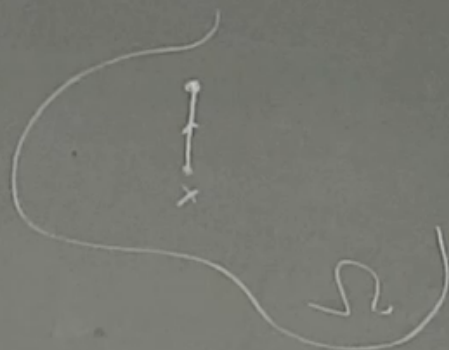
Wähle $\gamma(s) = x + se_j$ für $s \in [0, \varepsilon]$

$$\frac{d\gamma}{ds} = e_j$$

$$s=0: (DF^T - DF)(x)e_j = 0$$

$$\Rightarrow (DF^T - DF)(x) = 0$$

$$\Rightarrow F \text{ rotationsfrei } \square$$



$\int_{\gamma} F \cdot dx$ wegunabhängig $\iff F$ hat eine Stammfunktion



$\int_{\gamma} F \cdot dx$ homotopieinvariant $\iff F$ rotationsfrei, $\partial_i F_j = \partial_j F_i$

Abstrakter Standpunkt.

F gegebenes Vektorfeld

$X =$ Raum aller geschlossenen Kurven in Ω

$F: X \rightarrow \mathbb{R}, F(\gamma) = \int_{\gamma} F \cdot dx$

$$DF(\gamma)\phi = \int_a^b \langle (DF^T - DF) \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \phi \rangle ds$$

F rotationsfrei bedeutet $DF = 0$

$\Rightarrow F$ ist auf Wegkomponenten von X konstant.
= Homotopieklassen

Definition $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend

wenn jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([a,b], \Omega)$

geschlossen homotop ist zu einer konstanten Kurve.

Bsp. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zshg.

Ω sternförmig bzgl. $x_0 \in \Omega \iff$



Dann ist Ω einfach zshg:

$\gamma_1(s)$ bel. geschlossene Kurve in Ω

$$\gamma(s,t) = (1-t)x_0 + t\gamma_1(s)$$

Satz Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Es gelte:

(1) F rotationsfrei

(2) Ω ist einfach zusammenhängend

Dann hat F eine Stammfunktion auf Ω .

Beweis Nach Homotopieinvarianz ist $\int_{\gamma} F \cdot dx = 0$ für jede γ geschlossen.

Erster Satz: F hat Stammfunktion. $\square$

kleines technisches Problem.

• Definition von Homotopie benutzt nur stetig.

• Homotopieformel benutzt $\gamma \in C^2([a,b] \times [0,1], \Omega)$