Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2017/18, Serie 14
Prof. Dr. G. Wang — 29.1.2018
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} < 1\}$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$F(x, y, z) := (3x^2 z, y^2 - 2x, z^3).$$

Man berechne das Integral

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\mu,$$

wobei ν die äußere Normale von Ω ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit C^1-Rand und äußerer Normale $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$, die den Nullpunkt im seinen Inneren enthält und

$$\alpha(x) := \angle(x, \nu(x)), \quad x \in \partial\Omega,$$

der Winkel zwischen dem Ortsvektor x und dem Normalenvektor $\nu(x)$ an $\partial\Omega$. Man zeige

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\cos \alpha(x)}{|x|^{n-1}} d\mu(x) = \omega_{n-1},$$

wobei ω_{n-1} die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist.
Tipps: Man wende den Gausschen Integralsatz auf das Vektorfeld $F(x) := \frac{x}{|x|^n}$ *und die Menge* $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : |x| \geq \varepsilon\}$*für genügend kleines* $\varepsilon > 0$ *an.*

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei Ω eine offene Mange in $\mathbb{R}^3$ mit C^1-Rand und $p_1, \cdots, p_k \in \Omega$. Man berechne

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{|x - p_j|} d\mu(x).$$

(*vgl. Beispiel 10.3.*)

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis und (x_1, x_2, x_3) die euklidischen Koordinaten von $\mathbb{R}^3$, sowie Ω eine offene, beschränkte Menge vom $\mathbb{R}^3$ mit C^1-Rand und der äußeren Normalen ν. Man beweise den Satz von Archimedes:

$$\int_{\partial\Omega} x_3 \nu d\mu_{\partial\Omega} = Vol(\Omega)\, e_3$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 5.2.2018. bis 12:00**.