Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2017/18, Serie 2
Prof. Dr. G. Wang — 23.10.2017
MSc. Th. Körber

---

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset 2^X$ ist genau dann ein Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$(i)\, \emptyset \in \mathcal{R}, \quad (ii)\, A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{R}, \quad (iii)\, A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}.$$

Hierbei ist $\triangle$ die symmetrische Differenz: $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. In diesem Fall bildet $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ mit den Verknüpfungen $\triangle$ als Addition und $\cap$ als Multiplikation einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Es sei $X$ eine Menge sowie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Teilmengen von X. Der (mengentheoretische) *Limes superior* und (mengentheoretische) *Limes inferior* sind definiert als

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n\geq m} A_n \qquad \text{bzw.} \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n\geq m} A_n.$$

Zeigen Sie

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) &\subset \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n \\
&\subset \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n \\
&\subset \limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Das *Cantorsche Diskontinuum* ist definiert durch $C := \{a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} \in [0,1] \,|\, a_n \in \{0,2\}\}$. Zegen Sie die folgenden Aussagen.
(i) $C$ ist abgeschlossen und hat keine inneren Punkte. Weiter ist jeder Punkt in $C$ ein Häufungspunkt von $C$, d.h. $C$ ist perfekt.
(ii) Für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ sei der Operator $T(A) := \frac{1}{3}A \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}A)$ definiert. Hier bedeutet $\frac{1}{3}A$ eine Strechung um den Faktor $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3} + A$ eine Verschiebung um $\frac{2}{3}$. Es sei $C_0 = [0,1]$ und $C_n := T(C_{n-1})$. Dann gilt $C_n \subset C_{n-1}$ und $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$.
(iii) Berechnen Sie die Intervallängen $|C_n|$, und zeigen Sie $|C_n| \to 0$.

**Aufgabe 4** (*Überdeckungssatz von Heine-Borel*) (4 Punkte)

Fr eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) $M$ ist beschränkt und abgeschlossen.
(ii) Jede offene Überdeckung von $M$ enthält eine endliche Teilüberdeckung.
*Eine offene Überdeckung* $\{U\}_{\alpha \in I}$ *von* $M$ *ist ein System der offener Teilmengen* $U_\alpha$ *mit* $M \subset \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Hinweis für $(i) \Rightarrow (ii)$. (a) Zeigen Sie (ii) zunächst für einen Quader $M = Q = [0,1]^n$ durch ein Widerspruch-Argument (durch Halbieren und mithilfe des verallgemeinerten Schachtelungsprinzips). (b) Zeigen Sie dann, dass jede abgeschlosse Teilmenge $M$ von $Q = [0,1]^n$ (ii) erfüllt.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.* **Abgabe ist am Montag, 30.10 bis 12:00**.