
Aufgabe 1 (4 Punkte)

Jede abgeschlossene Teilmenge des $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Borelsch (siehe Satz 4.1.), also ist insbesondere das Lebesguesmaß $\mathcal{L}^n(A) \in [0, \infty]$ definiert.

Man untersuche, ob folgende Funktion $\eta : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß ist:

$$\eta(A) := \mathcal{L}^n(\overline{A}).$$

Dabei bezeichnet \overline{A} die abgeschlossene Hülle von A .

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^1([a, b])$.

(a) Sei $E := \{x \in [a, b] \mid f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $f(E)$ eine Lebesgue Nullmenge ist. *Tipp: Benutzen Sie Lemma 4.5 aus der Vorlesung.*

(b) Sei $G := \{x \in [a, b] \mid f(x) = 0\}$ und $H := \{x \in [a, b] \mid f(x) = 0, f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $G \setminus H$ eine Lebesgue Nullmenge ist. *Tipp: Zeigen Sie, dass $A_n := \{x \in [a, b] \mid f(x) = 0, |f'(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ nur endliche viele Elemente enthält.*

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien A, B \mathcal{L}^n -messbar mit $\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(B) < \infty$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^n(A \cap (B + x)) \rightarrow \mathcal{L}^n(A \cap B)$ für $x \rightarrow 0$.

Tipp: Approximieren Sie B von unten durch eine kompakte Menge K und von oben durch eine offene Menge U . Nutzen Sie, dass $K + x \subset U$ und $K - x \subset U$ für x genügend klein.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei A konvex und beschränkt, mit $0 \in \text{int}(A)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(\text{int}(A))$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst $\text{int}(A) = \cup_{k \geq 2} ((1 - \frac{1}{k})\overline{A})$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^n(\partial A) = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass A messbar ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 20.11 bis 12:00.