Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung | WS 21/22, Serie 01
Prof. Dr. G. Wang | 18.10.2021
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Variation der Determinate*) (4 Punkte)

Sei $g(t) : (-\epsilon, \epsilon) \to M_n(\mathbb{R})$ glatt mit $\det(g(t)) \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt} \det(g(t)) = \det(g(t)) g(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} g(t),$$

wobei $g(t)^{-1}$ die inverse Matrix von $g(t)$ ist und $A \cdot B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ji}$.

Aufgabe 2 (*Minimalflächensystem*) (4 Punkte)

Der Flächeninhalt von $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt, ist

$$\mathcal{A}(f) = \int_\Omega \sqrt{\det g}\, dx \quad \text{wobei } g_{\alpha\beta} = \langle \partial_\alpha f, \partial_\beta f \rangle.$$

Zeigen Sie: ist zusätzlich $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ Immersion, so gilt für alle $\phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}(f + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} = -\int_\Omega \langle \Delta_g f, \phi \rangle \sqrt{\det g} \quad \text{mit } \Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{\alpha,\beta} \partial_\alpha \big(g^{\alpha\beta} \sqrt{\det g} \partial_\beta f \big).$$

Aufgabe 3 (*p-harmonische Funktionen*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Die p-Energie von $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist definiert durch

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |Du|^p \quad \text{mit } 1 < p < \infty.$$

Berechnen Sie die erste Variation des Funktionals $\mathcal{E}(u)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei die Lagrange-Funktion $F : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Man zeige, dass $\mathcal{F} : C^{1,stw}([a, b]) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx,$$

ein stetiges Funktional ist.

Hier:

$$C^1([a,b]) = \{u \mid u \in u \in C([a,b]), u \text{ ist auf } [a,b] \text{ differenzierbar}, \ u' \in C([a,b])\},$$

wobei in den Randpunkten die einseitigen Ableitungen zu nehmen sind.

$$C^{1,stw}([a,b]) = \{u \mid u \in C([a,b]), u \in C^1([x_{i-1}, x_i]), i = 1, 2, \cdots, m\},$$

wobei $a = x_0 < x_1 \cdots < x_m = b$ eine von u abhängige Unterteilung von $[a,b]$ ist. Eine Funktion in $C^{1,stw}([a,b])$ heißt auf $[a,b]$ *stückweise differenzierbar.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 25.10.2021, vor der Vorlesung**.