Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS21/22, Serie 02
Prof. Dr. G. Wang — 25.10.2021
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (*starke und schwache lokale Minimalstelle*) (4 Punkte)

Gemäß Definition 2.5 ist $u \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U} \subset X = (\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$
1) eine *schwache lokale* Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, fall $\exists \delta_0 > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C} \cap B_{\delta_0}(u; X).$$

2) eine *starke lokale* Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, fall $\exists \delta_0 > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C} \cap B_{\delta_0}(u; C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)).$$

Sie zeigen, dass

a) $u(x) = 0$ eine schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(t)^2 - u'(t)^4) dt$ in $\mathcal{C} = \{u \in X \mid u(0) = u(1) = 0\}$ ist, wobei $X = C^1([0, 1])$ ist;

b) aber $u(x) = 0$ keine starke lokale Minimalstelle ist.
(*Hinweis Betrachte die Folge ($p < 1$)*

$$u_{p,q} = \begin{cases} \frac{q}{p} t, & 0 \leq t \leq p \\ \frac{q}{p-1}(t-1), & p < t \leq 1 \end{cases}$$

und berechne $\mathcal{F}(u_{p,q})$ mit $p \to 1$. $u_{p,q}$ lassen sich durch C^1 Funktionen in L^∞ approximieren.)

Aufgabe 2 (*Minimierungsproblem ohne Lösung*) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \left(\left(u'^2(x) - 1 \right)^2 + u(x)^2 \right) dx$$

sein Infimum auf $C^1([0, 1])$ nicht annimmt.

b) Sei $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^1 (x^2 u'(x)^2 + x u'(x)^3) dx$. Es gilt

$$\delta\mathcal{F}(0, \xi) = 0, \forall \xi \in C_0^1([-1, 1]), \quad \delta^2\mathcal{F}(0, \xi) > 0, \forall 0 \neq \xi \in C_0^1([-1, 1]).$$

Aber $u = 0$ ist keine schwache lokale Minimalstelle.

Aufgabe 3 (*Kapillarflächen*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Betrachte für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und κ, $\sigma \in \mathbb{R}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \int_\Omega u^2 + \sigma \int_{\partial\Omega} u \, d\mu.$$

Es gelte

$$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Berechnen Sie die resultierenden Gleichungen in Ω sowie auf $\partial\Omega$, und interpretieren Sie die Randbedingung geometrisch, änhlich wie in Bsp 2.32.

Aufgabe 4 (*EL-Gleichung*) (4 Punkte)

Sie betrachten $\mathcal{F}(u) := \int_a^b F(u(x), u'(x))dx$, d.h., die Lagrange-Funktion F nicht von x abhängt.

a) Sie leiten die Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$ her;

b) Sei u eine Lösung von der Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$. Sie zeigen, dass $F(u, u') - u' F_p(u, u') = const.$ auf $[a, b]$.
(*Wir nehmen an, dass F und u die geeignete Regularität haben.*)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 2.11.**