Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS21, Serie 03
Prof. Dr. G. Wang — 2.11.2021
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Minimalflächen vom Rotationstyp*) (4 Punkte)

Sei $u : [0, b] \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. Die durch

$$(x, u(x)\cos\theta, u(x)\sin\theta)$$

definierte Flache $f : [0, b] \times [0, 2\pi] \in \mathbb{R}^3$ ist eine Fläche vom Rotationstyp.

a) Sie zeigen, dass die Flächeninhlat von f

$$\mathcal{A}(u) = 2\pi \int_0^b u\sqrt{1 + u'(x)^2}dx$$

ist.

b) Mit Hilfe der Aufgabe 4b im Blatt 02 finden Sie die Lösung der Miminierer von

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^b u\sqrt{1 + u'(x)^2}dx$$

in $\mathcal{C} := \{u \in C^1([0, b]) \,|\, u(0) = 1, u(b) = B\}$.

Aufgabe 2 (konvexes Funktional) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ konvex und $g \in C^0(\overline{\Omega})$. Betrachten Sie auf $\mathcal{C} = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega (\phi(Du) + gu).$$

Zeigen Sie: u ist genau dann Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, wenn gilt:

$$\operatorname{div}[(D_p\phi)(Du)] = g.$$

Aufgabe 3 (*Erste und zeite Variationen*) (4 Punkte)

Man löse die Euler-Lagrange-Gleichungen in $C^2([0,1])$ für

a) $\mathcal{F}(u) = \int_0^1((u'(t))^2 + 2u(t))dt, \quad u(0) = u(1) = 1.$

b) $\mathcal{F}(u) = \int_0^2((u'(t))^2 + 2u(t)u'(t) + u(t)^2)dt, \quad u(0) = u(2) = 1.$

Man berechne die zweite Variation von $\mathcal{F}$ und diskutiere, ob die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen lokale oder globale unter allen Funktionen in $C^1([0,1])$ sind, die die gleichen Randbedingungen erfüllen.

Aufgabe 4 (*Geodetische in hyperbolischen Ebene*) (4 Punkte)

Für die Kurve $\gamma(t) = (\gamma^1, \gamma^2) : \mathbb{R} \to \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 | x^2 > 0\}$ betrachten Sie

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\gamma^2(t))^2} |\gamma'(t)|^2 dt.$$

Sie leiten die EL Gleichung her und bestimmen alle Lösungen.

Die halbe Ebene $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 | x^2 > 0\}$ *mit riemannscher Metrik* $g = \frac{1}{(x^2)^2}((dx^1)^2 + (dx^2)^2)$ *ist die hyperbolische Ebene.* $E(\gamma)$ *ist die Energie der Kurve* γ *und die Länge der Kurve* γ *ist* $L(\gamma) = \int \frac{1}{\gamma^2(t)} |\gamma'(t)| dt$. *Die Lösungen sind die Geodetische.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 8.11., vor der Vorlesung**.