Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS21, Serie 05
Prof. Dr. G. Wang — 15.11.2021
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (Holonome Nebenbedingungen) (4 Punkte)
Man berechne die Bahn $x = x(t)$ einer Kugel der Masse m, die ohne Reibung auf einer schiefen Ebene, beschrieben durch $x_1 + x_3 - 1 = 0$, von $x(0) = (0, 0, 1)$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = (0, v_2, 0)$ bis zur Ebene $x_3 = 0$ rollt. Dabei wirkt nur die Erdbeschleunigung g in Richtung der negativen x_3 -Achse. Man gebe die Laufzeit an und vergleiche die Zeit mit der des freien Falls von $(0, 0, 1)$ bis $(0, 0, 0)$. Hängt die Laufzeit von der Anfangsgeschwindigkeit $(0, v_2, 0)$ ab

Aufgabe 2 (*Unterhalbstetigkeit*) (4 Punkte)
Es sei X ein metrischer (allgemeiner: topologischer) Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. f heißt *unterhalbstetig* in $x_0 \in X$, falls $f(x_0) \neq -\infty$, und falls es zu jedem reellen $r < f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt: $r < f(x)$.
a) Zeige: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist unterhalbstetig genau dann, wenn $f^{-1}[(a, \infty)]$ offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.
b) Zeige: Das punktweise Supremum einer Familie in x_0 unterhalbstetiger Funktionen ist in x_0 unterhalbstetig.
c) Zeige: Ist (X, d) ein metrischer Raum, und ist $f : X \to [0, 1]$ unterhalbstetig, so gibt es eine monoton wachsende Folge stetiger Funktionen f_n, die punktweise gegen f konvergiert. (*Hinweis*: $f_n(x) = \inf\{f(y) + nd(x, y)|y \in X\}$.)

Aufgabe 3 (*Unterhalbstetigkeit des Längenfunktionals)* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Längenfunktional $L(u) := \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))2}dx$ unterhalbstetig ist bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,p}(I)$, $p \in (1, \infty)$, nicht aber stetig bezüglich dieser Konvergenz.
(*Hinweis*: Für ein Gegenbeispiel gegen die schwache Stetigkeit approximieren Sie eine konstante Funktion geeignet durch Zackenfunktionen)

Aufgabe 4 (*Minimierer*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Man zeige, dass sas Variationsproblem

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega (\frac{1}{2}|Du|^2 - fu)dx \quad \text{in } \mathcal{U} = \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \,|\, \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega\}$$

einen eindeutigen Minimierer hat.

Abgabe ist am Montag, 22.11., vor der Vorlesung.