Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS21, Serie 06
Prof. Dr. G. Wang — 22.11.2021
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Harmonische Funktion bzgl. der Metrik*) (4 Punkte)

Berechne die Euler-Lagrange-Gleichung für

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x) D_i u(x) D_j u(x) (\det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx,$$

wobei $(g^{ij}(x))_{i,j=1,\cdots,n}$ die inverse Matrix von der positiv-definiten Matrix $(g_{ij}(x))_{i,j=1,2,\cdots,n}$ ist. Seien $g_{ij} \in H^1(\Omega)$ für alle $i,j = 1,2,\cdots,n$. Sie zeigen, dass eine eindeutige Minimierer von $\mathcal{F}$ in der Menge $\{u \in H^(\Omega) : u - g \in H^1(\Omega)\}$ gibt. *Die Minimierer von $\mathcal{F}$ heißt harmonic Funktion bzgl. der Metrik $g_{ij}(x)$.*

Aufgabe 2 (*nichtkonvexe Funktionale*) (4 Punkte)

Betrachten Sie auf $W^{1,\infty}(I)$, $I = (0,1)$, die Funktionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u_x^2 - 1)^2 \, dx \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(u) = \int_0^1 \left((u_x^2 - 1)^2 + u^2\right) dx,$$

unter Nullrandbedingungen $u(0) = u(1) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Beide Funktionale haben das Infimum Null. Während für $\mathcal{F}$ unendlich viele Minimierer existieren, nimmt $\mathcal{G}$ sein Infimum nicht an.

(b) Keines der beiden Funktionale ist unterhalbstetig bzgl. $u_k \to u$ gleichmäßig auf I, bzw. bzgl. $u_k' \to u'$ schwach$*$ in $L^\infty(I) = L^1(I)'$.

Aufgabe 3 (*konvex und polykonvex*) (4 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $F_\alpha : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_\alpha(x, z, p) = \alpha |p|^2 + \det(p)$$

mit $p = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei $|p|^2 = \sum_{i,j=1}^2 p_{ij}^2$ ist.

a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die F_α die Legendre-Hadamard Bedingung erfüllt.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist F_α konvex? und polykonvex?

Aufgabe 4 (*Subdifferential*) (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine konvexe Funktion. Ein Vektor $g \in \mathbb{R}^n$ heißt *Subgradient* von f an der Stelle x_0, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.
Das *Subdifferential* $\partial f(x_0)$ ist die Menge aller Subgradienten von f im Punkt x_0.

a) Zeige: Sei $f : R^n \to \mathbb{R}$ konvex, unterhalbstetig, und $f \neq \infty$. Dann sind äquivalent:
1. $x^* \in \partial f(x_0)$.
2. $\langle x^*, z \rangle - f(z)$ nimmt sein Maximum bei $z = x_0$ an.

b) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

Bestimme das Subdifferential an der Stelle $x = 1$ und $x = 4$.

Abgabe ist am Montag, 06.12., vor der Vorlesung.