Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS21, Serie 07
Prof. Dr. G. Wang — 06.12.2021
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Divergenz-Struktur, Null-Lagrange-Funktion*) (4 Punkte)

a) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Man zeige

$$\operatorname{div}(\operatorname{cof} Dw) = 0,$$

d.h.,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{cof} Dw)_{ij} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

b) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u, v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $u - v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $(p > n)$. Man zeige:

$$\int_\Omega \det(Du) dx = \int_\Omega \det(Dv) dx.$$

(*Bemerkung.* Eine Funktion $F : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft, dass $\int_\Omega F(Du)$ nur von den Werten von u auf dem Rand $\partial\Omega$ abhängt, nennt man *Null-Lagrange-Function*)

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)

Sei $D = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $W^{1,2}(D, \mathbb{S}^2) = \{u \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3) : |u(z)| = 1 \text{ fast überall}\}$ unter schwacher Konvergenz in $W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$ abgeschlossen ist.

(b) Begründen Sie, dass das folgende Funktional für $\lambda \in [-1, 1]$ unter dieser Konvergenz unterhalbstetig ist ($\times$ bezeichnet das Kreuzprodukt):

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_D |Du|^2 + \lambda \int_D \langle u, \partial_1 u \times \partial_2 u \rangle.$$

(c) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$.

(d) Finden Sie ein Gegenbeispiel zur Unterhalbstetigkeit im Fall $|\lambda| > 1$.

Aufgabe 3 (*das relaxierte Funktional*) (4 Punkte)

Sie zeigen, dass das durch (6.3) definierte Funktional (das relaxierte Funktional) unterhalbstetig ist.

Aufgabe 4 (*Koerzivität*) (4* Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Funktional $F : X \to [0, \infty)$ heißt *mild koerziv*, falls es eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ existiert, so dass $\inf_K F = \inf_X F$. Weiters heißt F *koerziv*, falls für alle t die Subniveaus $\{F \leq t\}$ kompakte Teilmengen von X sind.
(a) Zeigen Sie: ist F koerziv, so ist es auch mild koerziv. Die umgekehrte Implikation ist im Allgemeinen falsch: zeigen Sie ein Gegenbeispiel.
(b) Ist F koerziv, oder mild koerziv, so existiert $x \in X$ mit

$$\overline{F}(x) = \min_X \overline{F} = \inf_X F,$$

wobei F das relaxierte Funktional von F ist.

Abgabe ist am Montag, 13.12., vor der Vorlesung.