

**Aufgabe 1** (*konvexe Einhüllende*) (4 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  stetig. Auf  $\mathcal{U}_a := \{u \in L^1(0, 1) : \int_0^1 u dx = a\}$  mit  $a \in \mathbb{R}$  betrachten wir das Funktional  $\mathcal{F} : \mathcal{U}_a \rightarrow [0, \infty)$  definiert durch

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 f(u) dx, \quad u \in \mathcal{U}_a.$$

- a) Man zeige, dass  $\inf_{u \in \mathcal{U}_a} \mathcal{F}(u) = Cf(a)$ , wobei  $Cf$  die konvexe Einhüllende von  $f$  bezeichnet.  
b) Wird das Infimum von  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{U}_a$  immer angenommen? Begründen Sie Ihre Antwort.  
c) Geben Sie ein Beispiel für ein  $f$  an, so dass das Minimierungsproblem  $\mathcal{F} \rightarrow \min$  in  $\mathcal{U}_a$ , aber nicht in  $\mathcal{U}_a \cap C^0([0, 1])$ , lösbar ist.

*Hinweis: Sie können für a) ohne Beweis benutzen, dass*

$$Cf(z) = \inf\{\lambda f(z_1) + (1 - \lambda)f(z_2) : z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}; \lambda \in [0, 1]\}.$$

für alle  $z \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 2** ( $\Gamma$ -Konvergenz) (4 Punkte)

Seien  $\mathcal{F}_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathcal{F}_\epsilon(x) = \epsilon x e^{-2\epsilon^2 x^2}$ . Zeigen Sie, dass  $\Gamma - \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\epsilon = \mathcal{F}$  mit

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-1/2}, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

$\mathcal{F}_\epsilon$  konvergiert punktweise gegen 0.

**Aufgabe 3** ( $\Gamma$ -Konvergenz) (4 Punkte)

$X$  erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

- a) Es sei  $\Gamma - \lim \mathcal{F}_k = F$  und  $\mathcal{G} : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt  $\Gamma - \lim(\mathcal{F}_k + \mathcal{G}) = F + \mathcal{G}$ .  
b) Aus  $\Gamma - \lim \mathcal{F}_k = F$  und  $\Gamma - \lim \mathcal{G}_k = G$  folgt nicht immer  $\Gamma - \lim(\mathcal{F}_k + \mathcal{G}_k) = F + G$ .

**Aufgabe 4** ( $\Gamma$ -Konvergenz)

(4 Punkte)

Sie bestimmen die  $\Gamma$ -Limes der Funktionenfolgen  $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 

$$\begin{aligned} F_n(x) &= n(\sin(nx) + 1) \\ F_n(x) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \\ F_n(x) &= \begin{cases} n^2x & \text{falls } 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2x & \text{falls } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0, & \text{ansonst} \end{cases} \\ F_n(x) &= \sin(nx) + \cos(nx) \end{aligned}$$

---

**Abgabe ist am Montag, 20.12., vor der Vorlesung.**