Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS21, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang — 20.12.2021
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (4* Punkte)

Sei $\Omega = \Pi_{i=1}(a_i, b_i)$ ein offener Quader in $\mathbb{R}^n$ und sei $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Wir erweitern nun f periodisch auf ganz $\mathbb{R}^n$ und definieren für $k \in \mathbb{N}$ $f_k(x) := f(kx)$. Sie Zeigen, dass für $1 \leq p < \infty$

$$f_k \rightharpoonup \bar{f} := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)dx \text{ in } L^p(\Omega) \text{ für } k \to \infty$$

gilt, durch folgende 4 Schritten:
1. $\|f_k\|_p \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
2. $\lim_{k\to\infty} \int_D f_k(x)dx = \int_D f(x)dx$ für alle achsenparallelen Würfel $D \subset \Omega$.
3. $\forall\ \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall\ E \subset \Omega$ messbar, $|E| < \delta\ \forall\ k \in \mathbb{N}$: $\int_E |f_k|^p dx < \epsilon$.
4. Zeigen: $\int_\Omega (f_n - \bar{f}) g dx \to 0$ für alle $g \in L^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (diese ist äquivalent zu $f_n \to f$ in L^p.

Aufgabe 2 (4* Punkte)

a) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{falls } 0 \leq x < \lambda \\ b & \text{falls } \lambda \leq x < 1. \end{cases}$$

Setze h periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und definiere $w_j(x) = h(jx)$. Bestimmen Sie das durch $\{w_j\}$ erzeugte Young Maß.
b) Sei $h : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Setze h periodisch auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort und definiere $w_j(x) = h(jx)$. Bestimmen Sie das durch $\{w_j\}$ erzeugte Young Maß.

Aufgabe 3 (4* Punkte)

Für eine Kurve $\{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,1]\}$ ist das Länge-Funktional definiert durch

$$\mathcal{L}(u) := \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx.$$

Die Zick-Zack-Minimalfolge von $\mathcal{L}$ ist

$$u_n(x) = \begin{cases} x - \frac{i}{n}, & \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+\frac{1}{2}}{n}; \\ \frac{i+1}{n} - x, & \frac{i+\frac{1}{2}}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}. \end{cases}$$

Sie bestimmen das durch $\{u_n\}$ erzeugte Young Maß.

Aufgabe 4 (4* Punkte)

Untersuche, ob die folgenden drei Funktionen oder Funktionale die (PS) Bedingung erfüllen.
a) $f_1(x,y) = \sin x + xy^2$ auf $\mathbb{R}^2$.
b) $f_2(x,y,z) = xy + yz + xz + 2014x$ auf $\mathbb{R}^3$.
c) $f_3(u) = \int_0^{1/2} u^2(x)dx$ auf $L^2([0,1],\mathbb{R})$
d) Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Zeige: Falls, die Funktion $|\varphi| + |D\varphi|$ koerziv ist, dann erfüllt φ die Palais-Smale-Bedingung.

Abgabe ist am Montag, 10.1.2022, vor der Vorlesung.

Frohe Weihnachten und Guten Rutsch ins Neue Jahr 2022!