Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS21, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 10.1.2022
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $2 < m < \frac{2n}{n-2}$. Zeige, dass das Funktional

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{m}\int_\Omega |u|^m dx, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

nach oben und unten *unbeschränkt* ist. (vgl. Sobolev-Ungleichung)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass ein Funktional $\mathcal{F} \in C^1(H, \mathbb{R})$ suf dem Hilbertraum H die Palai-Smale-Bedingung erfüllt, falls es folgende Eigenschaften hat:
(i) Jede (PS)-Folge von $\mathcal{F}$ ist in H beschränkt.
(ii) Es gibt einen linearen Operator $L : H \to H$ mit stetiger Inversen sowie einen stetigen (möglicherweise nichtlinear) kompakten Operator $K : H \to H$, d.h., der beschränkten Mengen in präkompakten Megnen abbildet, so dass an jeder Stelle $u \in H$ gilt:

$$D\mathcal{F}(u) = Lu + K(u).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Folgendes Beispiel demonstriert die Notwendigkeit der Kompaktheitsbedingung im MPT (Satz 7.8): Die Funktion

$$\mathcal{F}(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

erfüllt alle geometrische Bedingung (i)-(iii) des MPT: Bedingung (ii) mit $r = \frac{1}{2}$, sowie $\mathcal{F}(0, 0) = \mathcal{F}(2, 2) = 0$. Der einzige kritische Punkt von $\mathcal{F}$ ist jedoch $(0, 0)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, sternförmig bzgl 0 mit C^1 Rand. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u &= |u|^{p-1}u, & \text{in } \Omega \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Sei $p > \frac{n+2}{n-2}$. Zeige, dass $u = 0$.
(Man soll durch die Multiplikation der Gleichung von $x \cdot \nabla u$ berechnen, nicht die Pohozeav-Identität direkt verwenden.)

Abgabe ist am Montag, 17.1.2022, vor der Vorlesung.