Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS21, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 17.1.2022
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (*Diricheltenergie und konforme Invarianz*) (4 Punkte)

Sei D die Dirichlet-Energie, d.h.

$$D(X) = \frac{1}{2}\int_\Omega |DX|^2 dx.$$

Sie beweisen Lamma 9.2: Die Dirichletenergie D ist invariant unter der Konformtransformationen, d.h.,

$$D(X \circ g) = D(X) \tag{1}$$

für alle Diffeomorphismen $g : \overline{B} \to \overline{B}$ mit $|g_u|^2 - |g_v|^2 = 0 = g_u \cdot g_v$ in $\overline{B}$.

Aufgab 2 (*Satz von Noether*) (4 Punkte)

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und $X \in H^1(G, \mathbb{R}^n)$. Weiter, gelte

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} D(X \circ g_t^{-1}, g_t(G)) = 0,$$

für alle glatte Schar der Diffeomorphismen $g_t : \overline{G} \to g_t(\overline{G})$ mit $g_0 = id$.
Sie verwenden dem Satz von Noether und finden das Erhaltungsgesetz.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sie prüfen

$$(|X_u|^2 - |X_v|^2)(\phi_u^1 - \phi_v^2) + 2X_uX_v(\phi_u^2 + \phi_v^1) = \Re(\Phi \cdot \bar{\partial}\phi)$$

und Remark 9.9
Falls X harmonisch in B ist, gilt nach Lemma 9.7 und (9.6)

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} D(X \circ g_t^{-1}, g_t(G)) = -\frac{1}{2}\int_{\partial G} \Re(\Phi \cdot z\phi) ds.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei ein Variationsintegral der Form

$$\mathcal{F}(u) = \int_\alpha^\beta F(u(x), u'(x))dx.$$

Nehmen Sie an, die Lösung u des Variationsproblems $\delta\mathcal{F}(u) = 0$ sei eine invertierbare C^2 Funktion; die Inverse von $y = u(x)$ sei mit $x = v(y)$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass das Variationsproblem äquivalent ist zu $\delta G(v) = 0$ mit

$$G(v) = \int_a^b G(y, v'(y))dy$$

und

$$G(y, v'(y)) = F\left(y, \frac{1}{v'(y)}\right) v'(y).$$

Wie sind a und b bestimmt?

Abgabe ist am Montag, 24.1.2022, vor der Vorlesung.