Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS21, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 25.1.2022
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 (4+4 Punkte)
Sei $X = X_+$ und $Y = X_-$

$$X_\pm = \frac{1}{1+u^2+v^2}(2u, 2v, \pm(1-u^2-v^2))$$

die stereografische Projektion von obener (bzw unterer) Hemisphäre.
a) Sie Berechnen $D(X_+)$ und $V(X_+)$ und prüfen die Gleichheit in der Isoperimetrischen Ungleichung

$$36\pi|V(X) - V(Y)|^2 \leq |D(X) + D(Y)|^3,$$

für $X = X_+$ und $Y = X_-$.
b) Sie prüfen, dass $X_\pm$ die Gleichung $\Delta X = X_u \wedge X_v$ erfüllt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien δV und $\delta^2 v$ definiert durch

$$\langle \delta V(X), \phi \rangle = \int_B X_u \wedge X_v \cdot \phi \, dw,$$

und

$$\delta^2 V(X)(\phi, \psi) = \int_B (\phi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \phi_v) \cdot X dw$$

für $X \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$, $\phi, \psi \in C_0^\infty(B, \mathbb{R}^3)$.
Sie zeigen, dass δV auf eine Abbildung $\delta V : H^1(B, \mathbb{R}^3) \to (H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3))^*$ und $\delta^2 V$ auf Abbildung $\delta^2 V : H^1(B, \mathbb{R}^3) \to (H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3) \times H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3))^*$ fortsetzen kann.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Wir nehmen an, dass wir schon

$$\langle \delta V(X_m), \phi \rangle \to \langle \delta V(X_m), \phi \rangle, \quad \text{für } X_m \rightharpoonup X \text{ schwach in } H^1(B, \mathbb{R}^3) \tag{1}$$

für $\phi \in C_0^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ gezeigt haben. Sie zeigen nun (1) für $\phi \in H_0^1(B, \mathbb{R}^3)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sie zeigen: V ist invariant unter der Orientirungserhaltende Umparametrisierungen, d.h.

$$V(X) = V(X \circ \phi)$$

für jedt Orientirungserhaltende Umparametrisierung ϕ.
(b) Falls ϕ Orientirungsumkehrende Umparametrisierung ist, was ist die Beziehung zwischen $V(X)$ und $V(X \circ \phi)$.

Abgabe ist am Montag, 1.2.2022, vor der Vorlesung.