Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS21, Serie 13
Prof. Dr. G. Wang — 1.2.2022
Ph.D. F. Yang

Aufgabe 1 *(Die Gleichung der vorgegebenen Mittelkrümmung)* (4 Punkte)

Seien $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld mit $\operatorname{div} Q = H$. Sie berechnen die Euler-Lagrange-Gleichung von dem Funktional

$$D_h := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla X|^2 dw + 2\int_\Omega X_u \wedge X_v \cdot Q \circ X dw$$

für $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Sie berechnen auch die zweite Variation $\delta^2 D_H$ für $Q \in C^2$.

Die Euler-Lagrange-Gleichung heißt die Gleichung für eine vorgegebene Mittelkrümmung.

Aufgabe 2 (*Konforme Invarianz*) (4 Punkte)

Seien $\varphi, \psi \in H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ und $Z \in H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ eine schwache Lösung von

$$\Delta Z = \varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v. \tag{1}$$

Ist $g : B \to g(B)$ ein konformer Diffeomorphismus. Setzen

$$\tilde{Z} = Z \circ g, \quad \tilde{\varphi} = \varphi \circ g, \quad \tilde{\psi} = \psi \circ g.$$

Sie zeigen, dass $\tilde{Z}$ ist schwach Lösung von

$$\Delta \tilde{Z} = \tilde{\varphi}_u \wedge \tilde{\psi}_v + \tilde{\psi}_u \wedge \tilde{\varphi}_v.$$

In den Beweis bitte benutzen Sie die schwache Formulierung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sie schreiben (1) in der Polarkoordinaten (r, θ)

$$u = r\cos\theta, \quad v = r\sin\theta.$$

Schreiben Sie auch das Funktional

$$D_H(X) = \frac{1}{2}\int_B |\nabla X|^2 \, dw + \frac{2H}{3}\int_B X_u \wedge X_v \cdot X \, dw$$

in der Polarkoordinaten.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sie zeigen: D_H ist ein analytisches Funktional in $(H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)) + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ mit

$$\begin{aligned} D_H(X + \phi) &= D_H(X) + \langle D_H(X), \phi \rangle + \frac{1}{2}\delta^2 D_H(X)(\phi, \phi) + 2HV(\phi) \\ &= D_H(X) + D_H(\phi) + \langle \delta D_H(X), \phi \rangle + H\delta^2 V(X)(\phi, \phi), \end{aligned}$$

für alle $X, \phi \in (H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)) + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$.

Abgabe ist am Montag, 8.2.2022, vor der Vorlesung.