

Hinweis: Eine Wiederholung zum Thema *Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n* können Sie zum Beispiel im [Analysis 2 Skript](#)¹ von Herrn Kuwert aus dem Sommersemester 2021 (Kapitel 8, insbesondere Seite 66) nachschlagen.

Aufgabe 1 (*Untermannigfaltigkeit I*)

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 4\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist. Berechnen Sie im Punkt $(2, \sqrt{3}, 1)$ die Tangentialebene.

Aufgabe 2 (*Untermannigfaltigkeit II*)

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) = 1\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist. Bestimmen Sie im Punkt E_n den Tangentialraum.

Aufgabe 3 (*das Kreuz*)

Zeigen Sie, dass die Menge

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$$

keine C^0 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 ist.

Aufgabe 4 (*offene Kugeln*) (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Kugel

$$B_r(x) = \{y \in X : d(y, x) < r\} \quad \text{mit } x \in X, r > 0,$$

eine offene Teilmenge ist.

Abgabe der Lösungen bis Montag 25.10. um 12:00 in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten im Keller

¹Expliziter Link: <https://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/Analysis2SS20/>