**Aufgabe 1+2** *(Produktmannigfaltigkeiten)*
Seien $M, N$ topologische Räume. Eine Menge $\Omega \subset M \times N$ heiße offen, wenn es zu jedem $p = (x, y) \in \Omega$ offene Umgebungen $U, V$ von $x, y$ gibt mit $U \times V \subset \Omega$.

(a) Zeigen Sie, dass hierdurch eine Topologie auf $M \times N$ definiert ist.

(b) Sind $M, N$ Hausdorffsch, so auch $M \times N$.

(c) Haben $M, N$ abzählbare Basen, so auch $M \times N$.

(d) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $C^0$-Atlanten für $M, N$ der Dimensionen $m, n$, so bilden die $(\varphi, \psi)$ mit $\varphi, \psi \in \mathcal{A}, \mathcal{B}$ einen $C^0$-Atlas von $M \times N$ der Dimension $m + n$.

(e) Die Projektionen von $M \times N$ auf die Faktoren $M, N$ sind stetig.

(f) Sind $M$,$N$ $C^\infty$-Mannigfaltigkeiten, so auch $M \times N$.

**Aufgabe 3** *(Topologie der induzierten Metrik)*
Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $M \subset X$. Zeigen Sie dass die durch die induzierte Metrik gegebene Topologie genau die Relativtopologie ist.

**Aufgabe 4** *(Stetigkeitsbegriffe)*
Es sei $X$ ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis.

(a) Zeigen Sie, dass es für alle $x \in X$ eine absteigende Folge offener Mengen $(U_i)_{i=1}^N$ (d.h. $U_{i+1} \subset U_i$) mit $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ gibt, die $\bigcap_{i=1}^N U_i = \{x\}$ erfüllt und von der sich jede Menge $U_i$ als endlicher Schnitt von Basismengen schreiben lässt.

(b) Sei $Y$ ein weiterer topologischer Raum und $f : X \to Y$ folgenstetig (d.h. $x_n \to x$ impliziert $f(x_n) \to f(x)$). Zeigen Sie, dass $f$ stetig ist.

Insbesondere genügt es also auf Mannigfaltigkeiten die Folgenstetigkeit zu überprüfen.

*Abgabe der Lösungen bis Dienstag 2.11. um 12:00 in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten im Keller*