
Aufgabe 1 *(Der projektive Raum)*
Seien $M := \mathbb{S}^n$ und $\Gamma := \{\pm \mathrm{id}\}$ wie in Beispiel 2.6. Zeigen Sie ohne Satz 2.2:

(a) M/Γ ist Hausdorffsch.

(b) $\pi : M \to M/\Gamma$ ist eine Überlagerung.

In Satz 2.2 wurde auf M/Γ ein Atlas konstruiert.

(c) Gehen Sie die Konstruktion im Beweis von Satz 2.2 durch und geben Sie einen Atlas auf $\mathbb{S}^2/\Gamma$ an.

Aufgabe 2 *(Der Torus)*
Seien $M := \mathbb{R}^n$ und $\Gamma := \mathbb{Z}^n$ wie in Beispiel 2.7. Zeigen Sie ohne Satz 2.2:

(a) M/Γ ist Hausdorffsch.

(b) $\pi : M \to M/\Gamma$ ist eine Überlagerung.

Aufgabe $3 + 4$ *(Der projektive Raum II)*
Alternativ lässt sich der projektive Raum wie folgt definieren:

Auf $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : \; x = \lambda y,$$

setzen $\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} / \sim$ und statten den Quotienten mit der Quotiententoplogie aus. Es bezeichne $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit und diffeomorph zu $\mathbb{S}^n / \{\pm \mathrm{id}\}$ aus Aufgabe 1 ist. Gehen Sie hierfür so vor:

(a) Zeigen Sie: Die Quotiententopologie ist Hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis.

(b) Betrachten Sie für $0 \leq i \leq n$ die Mengen $V_i := \{(p_0, ..., p_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_i \neq 0\}$, $U_i := \pi(V_i)$ und die Abbildungen

$$\psi_i : \mathbb{R}^n \to U_i, \; \psi_i(x) := \pi\big((x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_i, ..., x_n)\big).$$

Zeigen Sie, dass durch $\varphi_i := \psi_i^{-1}$ ein Atlas auf $\mathbb{PR}^n$ definiert ist.

(c) $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{S}^n/\{\pm \mathrm{id}\}$ sind diffeomorph.

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 15.11. um 12:00 in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten im Keller