**Aufgabe** 1 (*Stetigkeit bzgl. Quotiententopologie*)
Seien $X$, $Y$ topologische Re und $\sim$ eine uivalenzrelation auf $X$. Fr $x \in X$ sei $[x] := \{x' \in X : x' \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von $x$, $X/\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) := [x]$, die Projektion. Wir versehen $X/\sim$ mit der Quotiententoplogie.

Sei $F : X \to Y$ mit $F(x) = F(x')$ falls $x \sim x'$. Zeigen Sie:

(a) $f : X/\sim \longrightarrow Y$, $f([x]) := f(x)$, ist wohldefiniert.

(b) $f$ ist genau dann stetig, wenn $F$ stetig ist.

**Aufgabe** 2 (*kritische Punkte – reguläre Werte*)
Seien $f : M \to N$ differenzierbar. Wir definieren:

(a) $x \in M$ ist kritischer Punkt von $f$, wenn $Df(x)$ nicht surjektiv ist.

(b) $y \in N$ ist regulärer Wert von $f$, wenn $f^{-1}\{y\}$ keine kritischen Punkte enthält.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr (Beweis oder Gegenbeispiel):

(1) Ist $Df(x)$ surjektiv, so ist $f(x)$ regulärer Wert.

(2) Ist $y$ regulärer Wert, so ist $f^{-1}(\{y\})$ eine Untermannigfaltigkeit.

(3) In (2) gilt auch die umgekehrte Implikation.

(4) Sei $g : N \to P$ ebenfalls differenzierbar, und $x$ sei kritischer Punkt von $g \circ f$. Dann folgt: $x$ ist kritischer Punkt von $f$ oder $f(x)$ ist kritischer Punkt von $g$.

**Aufgabe** 3 (*Hopffaserung*)
Sei $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Betrachten Sie $H : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ mit

$$H(z,w) = \begin{cases} \phi^{-1}\left(\frac{z}{w}\right) & \text{für } w \neq 0, \\ (0,0,1) & \text{für } w = 0. \end{cases}$$

Dabei ist $\phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ die stereographische Projektion vom Nordpol. Zeigen Sie, dass $H$ eine $C^\infty$-Abbildung ist mit $\operatorname{rang} DH(z, w) = 2$ für alle $(z, w) \in \mathbb{S}^3$. Bestimmen Sie $H^{-1}(\{\omega\})$ für gegebenes $\omega = H(z, w)$.

**Aufgabe** 4 (*Tangentialvektoren*)
Wir hatten auf $C^1$-Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ folgende Äquivalenzrelation betrachtet: $c_1 \sim c_2$ falls $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$ für eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$. Zeigen Sie: die Eigenschaft gilt dann für alle solche Karten.

*Abgabe der Lösungen bis Montag 22.11. um 12:00 in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten im Keller*