

Aufgabe 1 (*Koordinatenfeld auf \mathbb{S}^2*)

Sei $\varphi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Nordpol. Berechnen Sie bezüglich dieser Karte das Feld $\frac{\partial}{\partial x^i}$ und zeigen sie, dass es zu einem C^∞ -Feld auf ganz \mathbb{S}^2 fortsetzbar ist.

Aufgabe 2 (*Vektorfelder auf $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$*)

Konstruieren Sie auf $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ein Vektorfeld: Ohne Nullstelle im Fall n ungerade und mit genau einer Nullstelle im Fall n gerade.

Aufgabe 3 (*Vektorfelder auf \mathbb{R}^2*)

Betrachten Sie auf \mathbb{R}^n die Vektorfelder $X(x) = a \in \mathbb{R}^n$, $Y(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefssymmetrisch, und $Z(x) = x$. Berechnen Sie die Integralkurven von X, Y, Z . Zeigen Sie, dass die von X und Y erzeugten Flüsse $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Isometrien sind und, dass das für Z nicht der Fall ist.

Aufgabe 4 (*Fluss auf dem Torus*)

Sei $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 =: M$ der Torus, vgl. Aufgabe 2, Serie 4. Zeigen Sie:

- (a) Zu $a \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $X \in C^\infty(TM)$ mit $X(\pi(x, y)) = D\pi(x, y)(1, a)$.
- (b) Berechnen Sie die Integralkurven von X .
- (c) Es ist $a \in \mathbb{Q}$ genau wenn die Integralkurven von X periodisch sind.