Übungsaufgaben zur Differentialgeometrie WS 21/22, Serie 8
Ernst Kuwert, Jan Metsch 6. Dezember 2021

Aufgabe $1 + 2$ (*Endomorphismenbündel*)
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit maximalem Atlas $\mathcal{A}$, und

$$\mathrm{End}(TM) = \bigcup_{p \in M} \mathrm{End}(T_pM).$$

Wir setzen $\pi(F) = p$ für $F \in \mathrm{End}(T_pM)$. Zeigen Sie, dass damit $\mathrm{End}(TM)$ ein Vektorbündel der Dimension $n \times n$ ist (siehe Definition 4.1). Geben Sie auch die Kartenwechsel an.

Aufgabe 3 (*Zerlegbare k-Formen*)
Eine Form $\omega \in \Lambda^k(V)$ heißt zerlegbar (oder einfach), wenn sie als Dachprodukt von 1-Formen darstellbar ist. Beweisen Sie:

(a) Im Fall $\dim(V) \leq 3$ ist jede Form zerlegbar.

(b) $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ ist nicht zerlegbar.

Aufgabe 4 (*Lipschitzabhänggkeit des Flow*)
Betrachten Sie auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lösungen $\gamma_i : [0,T] \to \Omega$ der beiden Anfangswertprobleme

$$\gamma_i'(t) = X_i(\gamma_i(t)), \quad \gamma_i(0) = p_i.$$

Die $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ seien Lipschitzstetig mit Konstante $L < \infty$. Beweisen Sie

$$|\gamma_t(t) - \gamma_2(t)| \leq e^{Lt}\big(|p_1 - p_2| + t\|X_1 - X_2\|_{C^0(\Omega)}\big).$$

Hinweis. Gronwall-Ungleichung

Abgabe der Lösungen bis Montag 13.12. um 12:00 in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten im Keller