

Aufgabe 1 (*Integral und Teilung der Eins*) (4P.)

Sei $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Teilung der Eins auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Zeigen Sie

$$\int_M \omega = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_M \eta_i \omega$$

für jede integrierbare n -Form ω .

Aufgabe 2 (*Riemannsche Flächen*) (4P.)

Sei Σ eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, das heißt es gibt einen zwei-dimensionalen, reellen Atlas mit Karten

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, \varphi(p) = x + iy = z,$$

so dass alle Kartenwechsel holomorph sind. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Definiere bezüglich obiger Karten

$$J \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) = -b \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}.$$

Dann ist $J \in C^\infty(\text{End}(T\Sigma))$ wohldefiniert und es gilt $J^2 = -\text{Id}$.

(b) Sei $\Omega_{\mathbb{C}}^1(\Sigma)$ der Raum der \mathbb{C} -wertigen 1-Formen. Dann gilt die Zerlegung $\Omega_{\mathbb{C}}^1(\Sigma) = \Omega_{\mathbb{C}}^{1,0}(\Sigma) \oplus \Omega_{\mathbb{C}}^{0,1}(\Sigma)$, wobei $\Omega_{\mathbb{C}}^{1,0}(\Sigma)$ (bzw. $\Omega_{\mathbb{C}}^{0,1}(\Sigma)$) der Raum der 1-Formen ω ist mit $\omega(JX) = i\omega(X)$ (bzw. $\omega(JX) = -i\omega(X)$).

(c) Eine Form $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{1,0}(\Sigma)$ hat bzgl. einer Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Darstellung der Form $\omega = f dz$, wobei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $dz = dx + idy$, und es gilt:

$$\omega \text{ geschlossen auf } U \iff f \text{ holomorph.}$$

Bemerkung. Eine \mathbb{C} -wertige 1-Form ist vom Typ $\omega = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \Omega^1(\Sigma)$. Ihre äußere Ableitung ist gegeben durch $d\omega = d\alpha + id\beta$.

Aufgabe 3 (*Satz vom Igel*) (4P.)

Jedes tangentielle Vektorfeld $X \in C^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ hat eine Nullstelle. Andernfalls gibt es $X \in C^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ mit $\langle X(x), x \rangle = 0$ und $|X(x)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{S}^2$. Zeigen Sie:

(i) Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist folgende Abbildung diffeomorph:

$$f_\varepsilon : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(r), f_\varepsilon(x) = x + \varepsilon X(x) \quad \text{mit } r = (1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Für $\omega = x \lrcorner (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$ gilt $\int_{\mathbb{S}^2(r)} \omega = 4\pi (1 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}$.

(iii) $\int_{\mathbb{S}^2} f_\varepsilon^* \omega$ ist ein Polynom höchstens 4-ten Grades in $\varepsilon > 0$.

Abgabe der Lösungen bis Montag 17.01.2022 um 12:00, E-mail oder Postkasten,
Ernst-Zermelo-Str. 1