# Differentialgeometrie

Wintersemester 22/23

**Prof. Dr. E. Kuwert**

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

In der sogenannten elementaren oder klassischen Differentialgeometrie geht es um Kurven oder Flächen im drei-dimensionalen Raum. Diese werden durch Parametrisierungen beschrieben. Im 19. Jahrhundert begann eine Entwicklung, geometrische Objekte zu betrachten die nicht im Anschauungsraum liegen; dies hat schließlich Anfang des 20. Jahrhunderts zu dem abstrakten Konzept der Mannigfaltigkeit geführt. Das Interesse an diesem Konzept kam aus mehereren Richtungen:

- In der Geometrie von Euklid gab es die Frage, ob das 5. Postulat, das sogenannte Parallelenaxiom, aus den anderen gefolgert werden kann. In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts haben Lobatschewski, Bolyai und Gauß Modelle der nichteuklidischen Geometrie konstruiert und die Frage damit negativ beantwortet: in der hyperbolischen Ebene gelten alle Axiome mit Ausnahme des Parallelenaxioms. Es gibt mehrere Modelle, zum Beispiel kann man die obere Halbebene betrachten, wobei die kürzesten Linien Kreise und Geraden sind, die auf dem Rand senkrecht stehen. Hilbert hat 1901 gezeigt, dass die hyperbolische Ebene nicht als Fläche im $\mathbb{R}^3$ isometrisch realisierbar ist.

- Das Theorema egregium von C. F. Gauß (1827) besagt: die Gaußkrümmung $K$ einer Fläche ist unter Verbiegungen invariant, das heißt sie hängt nur von den Längen auf der Fläche selbst ab und nicht von ihrer Lage im Raum. Zum Beispiel hat ein Bogen Papier bei jeder Verbiegung Gaußkrümmung Null. Riemann hat in seinem Habilitationsvortrag (1854) (Thema: *Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen*) das Konzept eines abstrakten Raums mit Längen- und Winkelmessung skizziert, wir sprechen heute von einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Für eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist die Krümmung durch die Formel von Gauß gegeben, in höheren Dimensionen hat man den Riemannschen Krümmungstensor.

- Die *Allgemeine Relativitätstheorie* (um 1915) von A. Einstein verwendet das Konzept der Riemannschen Mannigfaltigkeit, um die Raum-Zeit zu beschreiben, wobei die Metrik in Zeitrichtungen negativ genommen wird. Die Kopplung zwischen Materie und Geometrie ist dabei durch die Einsteinschen Feldgleichungen gegeben.

- Der Begriff der Mannigfaltigkeit in der heutigen Form wurde erstmals durch H. Weyl im Jahr 1913 eingeführt, und zwar im Zusammenhang mit der *Mehrdeutigkeit von Lösungen algebraischer Gleichungen*. Zum Beispiel hat die Gleichung $w^2 - z = 0$ für $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$, die beiden Lösungen

  $$w_\pm = \pm\sqrt{r}\, e^{i\varphi/2} \quad \text{für } 0 \le \varphi < 2\pi.$$

  Man möchte eine Fläche definieren, auf der $w = \sqrt{z}$ stetig definiert ist. Die Idee ist zwei Exemplare der Ebene längs der positiven $x$-Achse so zu verkleben, dass die Lösungszweige an der Kante zusammenpassen. Allgemein führt diese Idee zum Konzept der eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit, diese heißen auch Riemannsche Flächen.

# 1 Der Begriff der Mannigfaltigkeit

**Definition 1.1** *Eine Topologie auf einer Menge $X$ ist ein Mengensystem $\mathcal{O} \subset 2^X$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,

(ii) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$, *falls* $U_\lambda \in \mathcal{O}$ *für alle* $\lambda \in \Lambda$ *($\Lambda$ beliebige Indexmenge),*

(iii) $\bigcap_{i=1}^N U_i \in \mathcal{O}$, *falls* $U_i \in \mathcal{O}$ *für* $i = 1, \ldots, N$ *mit* $N < \infty$.

Die Menge $X$ mit dem System $\mathcal{O}$ heißt topologischer Raum. Mit einem Vektorraum hat das nichts zu tun, man verwendet das Wort Raum nur wegen der Anschaulichkeit. Das griechische Wort *topos* kann mit *Ort* übersetzt werden. Die Mengen in $\mathcal{O}$ werden auch als offene Mengen bezeichnet. $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \backslash A$ offen ist, also $X \backslash A \in \mathcal{O}$. Für $x \in X$ heißt jede offene Menge $U$ mit $x \in U$ offene Umgebung von $X$. Allgemein ist eine Umgebung von $x \in X$ eine beliebige Menge, die eine offene Umgebung von $x$ enthält. Die folgende Eigenschaft ist nicht in jedem topologischen Raum erfüllt, aber in dieser Vorlesung wird sie immer verlangt.

**Definition 1.2** *Eine Topologie auf $X$ heißt Hausdorffsch bzw. $X$ heißt Hausdorffraum*, wenn je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Umgebungen $U$ bzw. $V$ besitzen mit $U \cap V = \emptyset$.*

**Beispiel 1.1** Jeder metrische Raum $(X, d)$ ist ein topologischer Raum, und zwar ist $U \subset X$ nach Definition offen wenn gilt:

für alle $y \in U$ gibt es ein $\varrho > 0$ mit $B_\varrho(y) \subset U$.

Dabei ist $B_\varrho(y) = \{z \in X : d(y, z) < \varrho\}$. Zeigen Sie:

(i) $B_r(x)$ ist offen für alle $x \in X$, $r > 0$.

(ii) Jedes offene $U$ ist Vereinigung von offenen Kugeln.

(iii) Das System aller offenen Mengen ist eine Topologie.

(iv) $X$ ist damit ein Hausdorffraum. //

**Beispiel 1.2 (Relativtopologie)** Sei $X$ ein topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{O}$. Für eine Teilmenge $M \subset X$ ist

$$\mathcal{O}_M = \{M \cap U : U \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf $M$, die sogenannte Relativtopologie. Die Schnitte $M \cap A$ mit $A$ abgeschlossen in $X$ sind dann abgeschlossen bezüglich der Relativtopologie, denn

$$M \backslash (M \cap A) = M \cap U \quad \text{mit } U = X \backslash A \in \mathcal{O}.$$

Umgekehrt: sei $B \subset M$ bzgl. $\mathcal{O}_M$ abgeschlossen, das heißt es gibt ein $U \in \mathcal{O}$ so dass

$$B = M \backslash (M \cap U) = M \cap A \text{ mit } A = X \backslash U, \quad \text{also } A \text{ abgeschlossen in } X.$$

*Felix Hausdorff, 1868-1942

Ist die Topologie auf $X$ Hausdorffsch, so gilt das auch für die Relativtoplogie auf $M$: zu $x, y \in M$, $x \neq y$, gibt es disjunkte offene Umgebungen $U, V$ in $X$, und dann sind $M \cap U$, $M \cap V$ ebenfalls disjunkt.

Statt *offen (abgeschlossen) bezüglich der Relativtopologie* sagt man auch kurz *relativ offen (abgeschlossen)*. Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum, so haben wir auf $M \subset X$ die induzierte Metrik $d_M(x, y) = d(x, y)$ $(x, y \in M)$. Die Relativtopologie ist die zugehörige Topologie.

**Definition 1.3** *Ein System $\mathcal{B}$ von offenen Mengen in einem topologischen Raum $X$ heißt Basis der Topologie, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.*

**Beispiel 1.3** Sei $(X, d)$ ein separabler metrischer Raum, das heißt es gibt eine abzählbare Teilmenge $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$, die dicht ist, zum Beispiel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dann bilden die Kugeln $B_{\frac{1}{k}}(p_i)$ mit $i, k \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Umgebungsbasis. Dazu ist zu zeigen: zu jeder Kugel $B_r(p)$ gibt es $i, k \in \mathbb{N}$ mit $p \in B_{\frac{1}{k}}(p_i)$ und $B_{\frac{1}{k}}(p_i) \subset B_r(p)$, bzw.

$$d(p, p_i) < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad d(p, p_i) + \frac{1}{k} \leq r.$$

Wir wählen erst $k$ mit $\frac{1}{k} < r$, und dann $p_i$ hinreichend nahe an $p$. Weiter gilt: jede Teilmenge $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, ist mit der induzierten Metrik ebenfalls separabel. Betrachte dazu den Abstand $\operatorname{dist}(p_i, M) = \inf_{q \in M} d(q, p_i)$. Zu $i, k \in \mathbb{N}$ wähle einen Punkt $q_{i,k} \in M$ mit

$$d(q_{i,k}, p_i) < \operatorname{dist}(p_i, M) + \frac{1}{k}.$$

Für einen gegebenen Punkt $q \in M$ und $i, k \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} d(q_{i,k}, q) &\leq d(q_{i,k}, p_i) + d(p_i, q) \\ &< \operatorname{dist}(p_i, M) + \frac{1}{k} + d(p_i, q) \\ &\leq 2d(p_i, q) + \frac{1}{k} < \varepsilon, \end{aligned}$$

für $p_i$ hinreichend nahe bei $q$ und $k$ groß. Durch Kombination der beiden Aussagen ergibt sich: ist $M$ Teilmenge eines separablen metrischen Raums, so hat die Relativtopologie auf $M$ eine abzählbare Umgebungsbasis. Zum Beispiel ist jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ Hausdorffsch und hat eine abzählbare Umgebungsbasis.

Wir wollen jetzt erklären, was eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist. Im Gegensatz zur Analysis im $\mathbb{R}^n$ definieren wir nicht erst die Stetigkeit in einem festen Punkt, sondern gleich (bzw. ehrlich gesagt nur) die Stetigkeit der gesamten Abbildung.

**Definition 1.4** *Seien $X, Y$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, falls folgende Implikation gilt:*

$$V \text{ offen in } Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) \text{ offen in } X.$$

**Beispiel 1.4** In metrischen Räumen $X, Y$ ist das äquivalent zur Folgenstetigkeit in allen Punkten $x \in X$.

**Beispiel 1.5** Seien $X, Y$ topologische Räume und $M \subset X$. Dann ist $f : M \to Y$ stetig bezüglich der Relativtopologie, wenn gilt: ist $V \subset Y$ offen, so gibt es $U \subset X$ offen mit

$$f^{-1}(V) = M \cap U.$$

Ist $M$ eine offene Teilmenge von $X$, so ist das gleichbedeutend mit $f^{-1}(V)$ offen in $X$, dieser Fall tritt unten auf. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist die Einschränkung

$$f|_M : M \to Y,\ (f|_M)(x) := f(x),$$

stetig bezüglich der Relativtopologie auf $M$. Denn für $V \subset Y$ offen haben wir

$$(f|_M)^{-1}(V) = M \cap f^{-1}(V).$$

**Definition 1.5** *Seien $U, V$ offene Teilmengen der topologischen Räume $X$ bzw. $Y$. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt Homeomorphismus, falls $f$ bijektiv ist und $f, f^{-1}$ beide stetig sind (als Abbildungen nach $Y$ bzw. $X$).*

Die hier eingeführten topologischen Begriffe sind gewöhnungsbedürftig. Wir wollen aber nun zum Konzept der Mannigfaltigkeit kommen. Die zentrale Idee ist, dass lokal Koordinaten definiert werden können.

**Definition 1.6 ($C^0$-Atlas)** *Sei $M$ ein topologischer Raum.*

(a) *Eine $n$-dimensionale Karte von $M$ ist ein Homeomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U)$ zwischen offenen Mengen $U \subset M$ und $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. $U$ ist das Definitionsgebiet und $\varphi(U)$ das Parametergebiet der Karte $\varphi$.*

(b) *Ein $n$-dimensionaler $C^0$-Atlas von $M$ ist ein System $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$, $i \in I$ Indexmenge, von $n$-dimensionalen Karten mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.*

Wir können uns den Atlas tatsächlich wie ein Buch vorstellen, auf der Seite mit der Nummer $i \in I$ ist das Teilgebiet $U_i$ von $M$ parametrisiert.

**Definition 1.7 ($C^0$-Mannigfaltigkeit)** *Ein topologischer Raum $M$, der Hausdorffsch ist und eine abzählbare Umgebungsbasis hat, heißt $n$-dimensionale $C^0$-Mannigfaltigkeit, wenn es einen $n$-dimensionalen $C^0$-Atlas von $M$ gibt.*

**Beispiel 1.6** Jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit der Relativtopologie ist eine $n$-dimensionale $C^0$-Mannigfaltigkeit, mit Atlas $\{\mathrm{id} : \Omega \to \Omega\}$.

**Beispiel 1.7** $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ ist mit der Relativtopologie ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, vgl. Beispiele 1.2 und 1.3. Schreiben wir $M$ als Graph über den Koordinatenachsen, so ergibt sich der folgende ein-dimensionale Atlas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: U_1 = M \cap \{x > 0\} \to (-1, 1), & \varphi_1(x, y) &= y, & \varphi_1^{-1}(y) &= (1 - |y|, y)\\
\varphi_2 &: U_2 = M \cap \{y > 0\} \to (-1, 1), & \varphi_2(x, y) &= x, & \varphi_2^{-1}(x) &= (x, 1 - |x|)\\
\varphi_3 &: U_3 = M \cap \{x < 0\} \to (-1, 1), & \varphi_3(x, y) &= y, & \varphi_3^{-1}(y) &= (|y| - 1, y)\\
\varphi_4 &: U_4 = M \cap \{y < 0\} \to (-1, 1), & \varphi_4(x, y) &= x, & \varphi_4^{-1}(x) &= (x, |x| - 1).
\end{aligned}$$

Zur Stetigkeit der Karten siehe Beispiel 1.5.

**Beispiel 1.8** Das Kreuz $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$, mit der induzierten Topologie, ist keine eindimensionale $C^0$-Mannigfaltigkeit (Übungsaufgabe).

**Bemerkung 1.1** Sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ $C^0$-Atlanten auf dem topologischen Raum $M$ der Dimension $n_{1,2}$, so ist $n_1 = n_2$, die Atlanten haben dieselbe Dimension. Wähle dazu Karten

$$\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^{n_i} \text{ in } \mathcal{A}_i \quad \text{mit } U_1 \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Dann ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ ein Homeomorphismus zwischen nichtleeren, offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{n_i}$. Der Satz von der Gebietsinvarianz aus der Topologie besagt nun, das ist nur für $n_1 = n_2$ möglich.

Die Bedingungen *Hausdorff* und *abzählbare Umgebungsbasis* sind technischer Natur, u.a. werden gewisse pathologische Fälle ausgeschlossen, wir wollen uns gar nicht damit befassen welche. Stattdessen stellen wir folgende wichtige Konsequenzen dieser Voraussetzungen fest.

**Satz 1.1 (Kompaktheitseigenschaften)** *Für eine topologische Mannigfaltigkeit $M$ gilt:*

(1) *$M$ ist lokal kompakt: ist $V$ offene Umgebung von $p \in M$, so gibt es eine kompakte Umgebung $K$ von $p$ mit $K \subset V$.*

(2) *Es gibt eine Ausschöpfung $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, mit $G_k$ offen und $G_k \subset\subset G_{k+1}$, das heißt $\overline{G}_k$ ist kompakt und $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$.*

(3) *$M$ hat einen abzählbaren Atlas.*

Beweis: Für Aussage (1) wähle eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$. Da $\varphi(U \cap V)$ offen, gibt es zu $x = \varphi(p)$ ein $\delta > 0$ mit $\overline{B_\delta(x)} \subset \varphi(U \cap V)$. Es folgt

$$p \in \varphi^{-1}(B_\delta(x)) \subset \varphi^{-1}(\overline{B_\delta(x)}) =: K \subset V.$$

Dabei ist $\varphi^{-1}(B_\delta(x))$ offene Umgebung von $p$, und $K$ ist als Bild einer kompakten Menge unter der stetigen Abbildung $\varphi^{-1}$ kompakt.

Nun zu Aussage (2). Sei $V_i$, $i \in \mathbb{N}$, eine Umgebungsbasis von $M$. Wir behaupten: die $V_i$ mit $\overline{V_i}$ kompakt bilden schon eine Umgebungsbasis. Sei dazu $\Omega \subset M$ offen. Zu $p \in \Omega$ wähle nach (1) eine offene Umgebung $V$ mit $\overline{V}$ kompakt. Es gibt dann ein $i \in I$ mit $p \in V_i \subset \Omega \cap V$, also $\overline{V_i}$ kompakt. Wir können damit von vornherein annehmen, dass die $V_i$ relativ kompakt sind, das heißt $\overline{V_i}$ ist kompakt. Definiere nun $G_1 = V_1$ und induktiv

$$G_k = \bigcup_{i=1}^{i_k} V_i \quad \text{wobei } i_k = \min\{i > i_{k-1} : \overline{G}_{k-1} \subset \bigcup_{j=1}^{i} V_j\}.$$

Nach Heine-Borel wird $\overline{G}_{k-1}$ durch endlich viele $V_i$ übedeckt, daher bricht das Verfahren nicht ab und Behauptung (2) ist gezeigt. Behauptung (3) folgt, da jedes $\overline{G}_k$ durch endlich viele Kartengebiete überdeckt wird nach Heine-Borel. □

Eine Folge $x_k$ in einem topologischen Raum $X$ konvergiert gegen ein $x \in X$, wenn es zu jeder offenen Umgebung $U$ von $x$ ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_k \in U$ für alle $k > K$. Die Hausdorff-Eigenschaft garantiert, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert hat. In einer $C^0$-Mannigfaltigkeit $M$ kann die Konvergenz wie folgt beschrieben werden:

Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte mit $x \in U$, so konvergiert eine Folge $x_k$ genau dann gegen $x$, wenn $x_k \in U$ für alle bis auf endlich viele $k$, und $\varphi(x_k) \to \varphi(x)$ in $\mathbb{R}^n$.

Ist $f : X \to Y$ stetig, so gilt die Implikation

$$x_k \to x \quad \Rightarrow \quad f(x_k) \to f(x).$$

Denn ist $V$ offene Umgebung von $f(x)$, so ist $f^{-1}(V)$ offene Umgebung von $x$ und damit $x_k \in f^{-1}(V)$, also $f(x_k) \in V$, für $k$ hinreichend groß. Umgekehrt: ist $f : X \to Y$ in jedem Punkt $x \in X$ folgenstetig, so ist $f$ stetig im Sinne von Definition 1.4 (ÜA). Im Kontext der Mannigfaltigkeiten ist also das Konzept der Folgenstetigkeit ausreichend.

Wie kommt nun die Differenzierbarkeit ins Spiel?

**Definition 1.8** *Sei $M$ ein topologischer Raum. Zwei $n$-dimensionale Karten $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$, $i = 1, 2$, heißen $C^\infty$-kompatibel, wenn der Koordinatenwechsel*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

*ein $C^\infty$-Diffeomorphismus ist. Ein $n$-dimensionaler $C^0$-Atlas $\mathcal{A}$ heißt $C^\infty$-Atlas (oder differenzierbar), wenn alle Karten in $\mathcal{A}$ $C^\infty$-kompatibel sind.*

**Bemerkung 1.2** Für jeden Kartenwechsel $\phi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ist $D\phi(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Denn $\phi$ hat die Umkehrabbildung $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, und mit der Kettenregel folgt

$$D\psi(\phi(x))D\phi(x) = D(\psi \circ \phi)(x) = \mathrm{E}_n \quad \text{für alle } x \in \varphi_1(U_1 \cap U_2).$$

**Beispiel 1.9** Die $n$-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\}$ ist das absolute Standardbeispiel einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit (außer natürlich $\mathbb{R}^n$). Wir betrachten den Atlas, der durch stereographische Projektion vom Nord- bzw. Südpol gegeben ist:

$$U_1 = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t < 1\}, \quad U_2 = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > -1\}.$$

In Formeln lauten die beiden Abbildungen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,t) &= \frac{x}{1-t}, \qquad \varphi_1^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+|y|^2}, -\frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}\right); \\ \varphi_2(x,t) &= \frac{x}{1+t}, \qquad \varphi_2^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+|y|^2}, \frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}\right). \end{aligned}$$

Es gilt $U_1 \cap U_2 = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : -1 < t < 1\}$ und somit folgt

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^n \backslash \{0\} = \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Als Koordinatenwechsel ergibt sich

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = \frac{\dfrac{2y}{1+|y|^2}}{1 - \dfrac{1-|y|^2}{1+|y|^2}} = \frac{y}{|y|^2}.$$

Somit ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein $C^\infty$-Atlas auf $\mathbb{S}^n$.

**Beispiel 1.10** Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ das Quadrat aus Beispiel 1.7. Für die dort betrachteten $\varphi_{1,2}$ gilt $U_1 \cap U_2 = \{(x,y) \in M : x, y > 0\}$, und

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (0,1) \to (0,1),\ \varphi_2(\varphi_1^{-1}(y)) = 1 - y.$$

Analog sind die anderen Koordinatenwechsel differenzierbar, es handelt sich also, etwas überraschend, um einen $C^\infty$-Atlas.

Allgemein hat man in der Wahl der Karten diverse Möglichkeiten. Sind zwei Karten $(V_1, \psi_1)$ und $(V_2, \psi_2)$ mit allen Karten $(U_i, \varphi_i)$ aus einem $C^\infty$-Atlas $\mathcal{A}_0$ kompatibel, so sind sie auch untereinander kompatibel. Denn $V_1 \cap V_2 = \bigcup_{i \in I} V_1 \cap V_2 \cap U_i$, und

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \psi_2 \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(V_2 \cap U_i)} \circ (\varphi_i \circ \psi_1)|_{\psi_1(V_1 \cap U_i)} \quad \text{auf } V_1 \cap V_2 \cap U_i.$$

**Definition 1.9** *Ein $n$-dimensionaler $C^\infty$-Atlas $\mathcal{A}$ auf $M$ heißt maximal, wenn jede $n$-dimensionale Karte, die mit den Karten in $\mathcal{A}$ $C^\infty$-kompatibel ist, selbst schon zu $\mathcal{A}$ gehört. Ein solcher Atlas heißt auch $C^\infty$-Struktur oder differenzierbare Struktur auf $M$.*

Zu einem gegebenen $C^\infty$-Atlas $\mathcal{A}_0$ gibt es genau einen maximalen $C^\infty$-Atlas $\mathcal{A}$, der $\mathcal{A}_0$ enthält. Und zwar nehmen wir einfach alle Karten hinzu, die mit $\mathcal{A}_0$ kompatibel sind. Wie bemerkt sind diese Karten auch miteinander kompatibel, wir bekommen also so einen differenzerbaren Atlas. Dieser ist maximal, denn jede mit $\mathcal{A}_0$ kompatible Karte ist ja dabei. Ist $\mathcal{A}'$ ein anderer maximaler Atlas, der $\mathcal{A}_0$ enthält, so ist jede Karte in $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{A}_0$ kompatibel, also gilt $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, und sogar Gleichheit wegen der Maximalität. Man muss hier sagen, es hat noch niemand einen maximalen Atlas konkret gesehen, es handelt sich um einen theoretischen Begriff, der aber nützlich ist.

**Bemerkung 1.3** Natürlich können auch $C^k$-Atlanten für $k \in \mathbb{N}$ betrachtet werden. Aber jeder maximale $C^k$-Atlas $\mathcal{A}$ enthält einen $C^\infty$-Atlas $\mathcal{A}'$ [†].

**Definition 1.10** *Eine $n$-dimensionale $C^\infty$-Mannigfaltigkeit (oder: differenzierbare Mannigfaltigkeit) ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, zusammen mit einem $n$-dimensionalen, maximalen $C^\infty$-Atlas auf $M$.*

Um eine differenzierbare Mannigfaltigkeit anzugeben, reicht wie gesagt die Angabe eines differenzierbaren Atlas.

**Beispiel 1.11** Ist $M$ eine $C^0$-Mannigfaltigkeit und besteht der zugehörige Atlas $\mathcal{A}$ nur aus einer Karte $\varphi : M \to \Omega$, so ist $M$ automatisch eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit, denn die Bedingung aus Definition 1.8 ist leer. Zum Beispiel ist jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in kanonischer Weise eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit, als Karte wählt man $\mathrm{id} : \Omega \to \Omega$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ mit dieser Struktur eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

**Beispiel 1.12** Sind $M$ und $N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $m$ bzw. $n$, so ist $M \times N$ kanonisch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$, die Produktmannigfaltigkeit von $M$ und $N$ (Übungsaufgabe).

[†] H. Whitney, Annals of Math. **37** (1936), 645–680.

**Definition 1.11** *Ein topologischer Raum $X$ heißt zusammenhängend, wenn für $A \subset X$ folgende Implikation gilt:*

$$A \text{ offen und abgeschlossen, } A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = X.$$

Alternativ: jede lokal konstante Funktion auf $X$ ist konstant.

**Beispiel 1.13** Das Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Denn sei $A \subset [0,1]$ offen, abgeschlossen und nichtleer. Dann folgt für die charakteristische Funktion $\chi_A' \equiv 0$, also $\chi_A \equiv 1$ bzw. $A = X$. //

**Definition 1.12** *Sei $X$ topologischer Raum, und $x_0, x_1 \in X$. Ein Weg von $x_0$ nach $x_1$ ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([0,1], X)$ mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Wenn es einen solchen Weg gibt, so heißen $x_0, x_1$ verbindbar. $X$ heißt wegzusammenhängend, wenn je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ verbindbar sind.*

**Lemma 1.1** *Sei $X$ ein topologischer Raum.*

(i) *„verbindbar“ ist Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen Wegkomponenten.*

(ii) *$X$ wegzusammenhängend $\Rightarrow$ $X$ zusammenhängend.*

Beweis: Für (i) prüfen wir die drei Eigenschaften:

$x \sim x$**:** wähle $\gamma(t) \equiv x$ für alle $t \in [0,1]$.

$x_0 \sim x_1 \Rightarrow x_1 \sim x_0$**:** sei $\gamma$ Weg von $x_0$ nach $x_1$; wähle $\sigma(t) = \gamma(1-t)$ für $t \in [0,1]$.

$x_0 \sim x_1$**,** $x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_0 \sim x_2$**:** Seien $\gamma_1, \gamma_2$ Wege von $x_0$ nach $x_1$ bzw. $x_1$ nach $x_2$. Wähle

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Für (ii) sei $A \subset X$ offen und abgeschlossen, und $x_0 \in A$. Nach Vorassetzung gibt es zu $x \in X$ einen Weg $\gamma$ von $x_0$ nach $x$. Dann ist $\gamma^{-1}(A) \subset [0,1]$ offen und abgeschlossen, sowie $0 \in \gamma^{-1}(A)$. Nach Beispiel 1.13 ist dann $x = \gamma(1) \in A$, also $A = X$. □

**Satz 1.2** *Sei $M$ eine $n$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

$$M \quad \text{wegzusammenhängend} \quad \Leftrightarrow \quad M \quad \text{zusammenhängend.}$$

Beweis: Es ist nur noch die Aussage „$\Leftarrow$“ zu zeigen. Der Beweis beruht darauf, dass $M$ *lokal* wegweise zusammenhängend ist. Wähle nämlich zu $x \in M$ eine Karte $\varphi : U \to V$ mit $x \in U$. Für $r > 0$ hinreichend klein gilt $B_r(\varphi(x)) \subset V$, und $U_x := \varphi^{-1}\big(B_r(\varphi(x))\big)$ ist wegweise zusammenhängend.

Sei nun $x_0 \in M$ beliebig und $A$ die Wegkomponente von $x_0$. Für $x \in X$ gilt entweder $U_x \subset A$ oder $U_x \subset X \backslash A$. Somit sind $A$ und $X \backslash A$ offen. Wegen $x_0 \in A$ folgt $A = M$, also ist $M$ wegzusammenhängend. □

**Beispiel 1.14** Folgende Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht wegweise:

$$M = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x < 1\} \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

# 2 Abbildungen und Überlagerungen

Die Stetigkeit von Abbildungen zwischen differenzerbaren Mannigfaltigkeiten ist definiert, sie sind ja insbesondere topologische Räume. Jetzt geht es um $C^k$-Abbildungen.

**Definition 2.1** *Seien $M, N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $m$ bzw. $n$. Eine Abbildung $f : M \to N$ ist von der Klasse $C^k(M, N)$ wobei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, wenn es zu jedem $p \in M$ Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ von $M$ bzw. $N$ gibt mit*

(a) *$p \in U$ und $f(U) \subset V$,*

(b *$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k(\varphi(U), \mathbb{R}^n)$.*

*Wir bezeichnen diese Abbildungen mit $C^k(M, N)$, im Fall $N = \mathbb{R}$ mit $C^k(M)$.*

Zwei Anmerkungen zur Definition:

- für $k = 0$ ist die Definition gleichbedeutend mit der Stetigkeit von $f$.
- Seien $\varphi' : U' \to \varphi'(U')$ bzw. $\psi' : V' \to \psi'(V')$ irgendwelche Karten von $M$ bzw. $N$ mit $f(U') \subset V'$. Dann folgt
$$\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} \in C^k(\varphi'(U'), \mathbb{R}^n).$$
Zu $p \in U'$ wähle nämlich $\varphi : U \to \varphi(U)$, $\psi : V \to \psi(V)$ wie in Definition 2.1, und betrachte folgendes Diagramm:
$$\begin{tikzcd}
\varphi(U \cap U') \arrow[rrr, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\in C^k"] & & & \psi(V \cap V') \arrow[dd, "\psi'\circ\psi^{-1}\in C^\infty"] \\
& U \cap U' \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[dl, "\varphi'"] \arrow[r, "f"] & V \cap V' \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & \\
\varphi'(U \cap U') \arrow[uu, "\varphi\circ(\varphi')^{-1}\in C^\infty"] \arrow[rrr, "\psi'\circ f\circ(\varphi')^{-1}"] & & & \psi'(V \cap V')
\end{tikzcd}$$

**Beispiel 2.1** Betrachte $\mathbb{S}^n$ mit Karten $\varphi_{1,2} : U_{1,2} = \mathbb{S}^n \backslash \{(0, \pm 1)\} \to \mathbb{R}^n$, siehe Beispiel 1.9. Für $\lambda > 0$ sei
$$\tau_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \tau_\lambda(x) = \lambda\, x.$$
Definiere nun $\sigma_\lambda : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ wie folgt:
$$\sigma_\lambda(p) = \begin{cases} \big(\varphi_1^{-1} \circ \tau_\lambda \circ \varphi_1\big)(p) & \text{falls } p \neq (0,1) \\ (0,1) & \text{falls } p = (0,1). \end{cases}$$
Wir zeigen, dass $\sigma_\lambda$ eine $C^\infty$-Abbildung ist: für $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ gilt $\sigma_\lambda(U_1) \subset U_1$ und
$$\varphi_1 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_1^{-1} = \tau_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$
Für $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ gilt $\sigma_\lambda(U_2) \subset U_2$ und
$$\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1} \circ \tau_\lambda \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1} & x \neq 0 \end{cases}$$

Nach Beispiel 1.9 ist $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x) = x/|x|^2$, also folgt für $x \neq 0$

$$(\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1})(x) = \frac{\tau_\lambda\left(x/|x|^2\right)}{\left|\tau_\lambda\left(x/|x|^2\right)\right|^2} = \frac{1}{\lambda}x.$$

Insgesamt folgt $\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, insbesondere für $x = 0$, also ist $\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1} \in C^\infty$.

**Definition 2.2** *Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt Diffeomorphismus, falls $f$ bijektiv ist, und $f, f^{-1}$ von der Klasse $C^\infty$ sind.*

**Beispiel 2.2** Die Abbildung $\sigma_\lambda : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist ein Diffeomorphismus, denn $\sigma_\lambda^{-1} = \sigma_{1/\lambda}$.

**Beispiel 2.3** Betrachte auf $\mathbb{R}$ die beiden Atlanten

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = x\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = x^3\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ definieren verschiedene differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$, denn die Karten sind nicht einmal $C^1$-kompatibel (geschweige denn $C^\infty$):

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto s^3 \\ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{t} & t \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-t} & t < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ist nicht differenzierbar in $t = 0$. Die Abbildung

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2), \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}$$

ist aber ein Diffeomorphismus! Denn

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} &= \mathrm{id}_\mathbb{R} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\ \varphi_1 \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1} &= \mathrm{id}_\mathbb{R} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Auf der Menge der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (mit maximalen Atlanten) ist

$$M \sim N \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ diffeomorph } N$$

eine Äquivalenzrelation; ihre Äquivalenzklassen heißen Diffeomorphietypen. Es ist eine sehr schwierige Frage, wieviele verschiedene Mannigfaltigkeiten – im Sinn von nicht diffeomorph - es in der jeweiligen Dimension gibt. Hier nur einige Ausblicke ohne Beweis, wobei wir stets von zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ausgehen:

- Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ ist die einzige kompakte, eindimensionale Mannigfaltigkeit, die einzige nichtkompakte ist $\mathbb{R}$, das ist also relativ einfach.

- In Dimension 2 hat man eine vollständige Liste der kompakten orientierbaren Flächen: es sind die Sphäre, der Torus, die Brezel (2 Löcher), und so weiter. Die Brezel kann durch Zusammensetzen von 2 Tori konstruiert werden, man entfernt jeweils eine kleine Kreisscheibe und verbindet durch einen Zylinder. Analog kann eine Fläche mit $p$ Löchern aus $p$ Tori gebaut werden. Für die kompakten, nicht orientierbaren Flächen gibt es eine ganz analoge Beschreibung. Diese Klassifikation beruht auf komplexer Analysis, dem Uniformisierungssatz von Poincaré und Koebe (1883/1907). Dieser ist eine allgemeinere Version des Riemannschen Abbildungssatzes.

- Die Poincaré-Vermutung besagt: jede 3-dimensionale kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zur 3-Sphäre. Das wurde von Perelman 2003 bewiesen (Fields Medaille 2006). Der Beweis verwendet eine Deformation der Mannigfaltigkeit durch den Ricci-Fluss, eine nichtlineare parabolische Differentialgleichung. Er zeigt auch eine allgemeine Klassifikation von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten, die Vermutung von Thurston.

- Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keinen differenzierbaren Atlas haben. Das erste Beispiel in Dimension 10 stammt von Kervaire (1960), durch Konstruktion einer topologischen Invariante. Donaldson fand 1984 Beispiele in Dimension 4, sein Beweis beruht auf der Analysis einer nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung, der Yang-Mills Gleichung (Fields-Medaille 1986).

- Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die mehrere nicht diffeomorphe differenzierbare Strukturen besitzen. So gibt es auf der 7-dimensionalen Sphäre 28 verschiedene differenzierbare Strukturen (Milnor 1962, Fields Medaille 1964). Und 1984 zeigte Gompf (aufbauend auf den Resultaten von Donaldson) die Existenz überabzählbar vieler, nicht diffeomorpher $C^\infty$-Strukturen auf $\mathbb{R}^4$!

Soweit die Highlights des 20. Jahrhunderts, nun aber zurück zu den Niederungen der Vorlesung. Eine Verkettung von $C^k$-Abbildungen ist wieder eine $C^k$-Abbildung, das heißt

$$f \in C^k(M,N),\ g \in C^k(N,P) \quad \Rightarrow \quad g \circ f \in C^k(M,P). \tag{2.1}$$

Um das zu etwas genauer zu zeigen, wähle zu $p \in M$ Karten

$$\begin{array}{lll} \varphi : U \to \varphi(U) & \text{mit} & p \in U, \\ \psi : V \to \psi(V) & \text{mit} & f(p) \in V, \\ \chi : W \to \chi(W) & \text{mit} & g(f(p)) \in W. \end{array}$$

Wir können $f(U) \subset V$ und $g(V) \subset W$ annehmen, sonst ersetze erst $V$ durch $V \cap g^{-1}(W)$ und dann $U$ durch $U \cap f^{-1}(V)$. Unsere Behauptung (2.1) folgt nun aus der $C^k$-Kettenregel:

$$\chi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\chi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \in C^k(\varphi(U), \mathbb{R}^p) \quad \text{wobei } p = \dim P.$$

**Satz 2.1** *Die Menge* $\mathrm{Diff}(M)$ *der* $C^\infty$*-Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit* $M$ *ist eine Untergruppe der Bijektionen von* $M$*.*

Beweis: Für $f, g \in \mathrm{Diff}(M)$ ist $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Diff}(M)$ wegen (2.1). □

Die Homeomorphismen und die $C^k$-Diffeomorphismen, $k \in \mathbb{N}$, bilden auch eine Gruppe.

**Definition 2.3** *Sei* $\Gamma$ *eine Untergruppe von* $\mathrm{Diff}(M)$*. Dann ist*

$$p \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g \in \Gamma \text{ mit } g(p) = q$$

*eine Äquivalenzrelation auf* $M$*. Sei* $\pi : M \to M/\!\sim$, $\pi(p) = [p]$*, die Projektion auf die Menge der Äquivalenzklassen. Wir betrachten auf* $M/\!\sim$ *die Quotiententopologie*

$$U \subset M/\!\sim \text{ offen} \quad \Leftrightarrow \quad \pi^{-1}(U) \subset M \text{ offen.}$$

*Bezeichnungen:* Die Äquivalenzklasse $[\,p\,] = \{g(p) : g \in \Gamma\}$ wird mit $\Gamma \cdot p$ bezeichnet, sie heißt Bahn von $p$. Der Quotient $M/\!\sim$ heißt Bahnenraum, die übliche Notation ist $M/\Gamma$.

Dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, sieht man leicht: es gilt $\mathrm{id}_{\mathrm{M}}(p) = p$, aus $g(p) = q$ folgt $g^{-1}(q) = p$, und mit $g(p) = q$, $h(q) = r$ ist $(h \circ g)(p) = r$. Dabei ist $\mathrm{id}_{\mathrm{M}} \in \Gamma$, und mit $g, h \in \Gamma$ sind auch $g^{-1}, h \circ g \in \Gamma$. Auch die Eigenschaften der Topologie folgen direkt, es gilt

$$\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \pi^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i), \quad \pi^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{N} U_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{N} \pi^{-1}(U_i).$$

Nach Definition der Topologie ist die Abbildung $\pi : M \to M/\Gamma$ stetig. Sie bildet außerdem offene Mengen in offene Mengen ab, denn für $V \subset M$ offen gilt

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(V) = \text{ offen in } M.$$

Sei $V_i$, $i \in I$, abzählbare Basis von $M$. Dann bilden die $U_i = \pi(V_i)$ eine abzählbare Basis von $M/\Gamma$. Denn für $U \subset M/\Gamma$ offen ist $\pi^{-1}(U)$ Vereinigung von Mengen $V_i$, $i \in I'$, und es folgt

$$U = \pi(\pi^{-1}(U)) = \pi\Big(\bigcup_{i \in I'} V_i\Big) = \bigcup_{i \in I'} \pi(V_i) = \bigcup_{i \in I'} U_i.$$

Die Frage ist nun, ob $M/\Gamma$ eine Mannigfaltigkeit ist. Die folgenden zwei Beispiele zeigen, dass das ohne weiteres nicht stimmt.

**Beispiel 2.4** Die Gruppe $\Gamma = \pm 1$ operiert durch Multiplikation auf $\mathbb{R}$, aber $\mathbb{R}/\Gamma$ ist keine eindimensionale $C^0$-Mannigfaltigkeit. Denn sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine beliebige Karte mit $[0] \in U$. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \pi^{-1}(U)$ bzw. $(-\varepsilon, \varepsilon)/\pm \subset U$. Durch Einschränkung haben wir den Homeomorphismus $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon)/\pm \to V$, für $V \subset \mathbb{R}$ offen. Setze $x = \varphi([0])$. Die Abbildung $\varphi \circ \pi : (0, \varepsilon) \to V \backslash \{x\}$ ist stetig und surjektiv, also ist $V \backslash \{x\}$ zusammenhängend, ein Widerspruch.

**Beispiel 2.5** Die Gruppe $\Gamma = (\mathbb{Q}, +)$ operiert durch Addition auf $\mathbb{R}$. Der topologische Raum $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist aber nicht Hausdorffsch: seien $U_i \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ offene Umgebungen von $\pi(x_i)$ für $i = 1, 2$. Dann sind $V_i = \pi^{-1}(U_i)$ offene Umgebungen von $x_{1,2}$. Da $\mathbb{Q}$ dicht, gibt es $q_k \in \mathbb{Q}$ mit $q_k \to x_2 - x_1$. Es folgt $U_1 \ni \pi(x_1) = \pi(x_1 + q_k) \in \pi(V_2) = U_2$ für $k$ hinreichend groß.

Um diese Probleme auszuschliessen, führen wir folgende Bedingung ein.

**Definition 2.4** *Die Untergruppe* $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(M)$ *operiert eigentlich diskontinuierlich auf* $M$*, falls folgende zwei Bedingungen gelten:*

(i) *Zu* $p \in M$ *gibt es eine offene Umgebung* $U$ *mit* $g(U) \cap U = \emptyset$ *für alle* $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_M\}$.

(ii) *Zu* $p, q \in M$ *mit* $q \notin \Gamma \cdot p$ *gibt es offene Umgebungen* $U, V$ *mit* $V \cap \bigcup_{g \in \Gamma} g(U) = \emptyset$.

Aus Bedingung (i) folgt insbesondere, dass $\Gamma$ (Fixpunkt-)frei operiert, das heißt für alle $p \in M$ und alle $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_M\}$ gilt $g(p) \neq p$. Der Begriff *eigentlich diskontinuierlich* ist in der Literatur nicht einheitlich, oft wird nur Bedingung (i) verlangt. Wir werden unten klar sehen, welche Rolle (i) und (ii) spielen. Vorher betrachten wir den Spezialfall, dass $\Gamma$ bezüglich einer Metrik $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ isometrisch operiert, also

$$d\big(g(x), g(y)\big) = d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M,\ g \in \Gamma.$$

Bedingung (i) ist dann erfüllt, wenn

$$\varrho(p) = \inf\{d(g(p), p) : g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_M\}\} > 0 \quad \text{für alle } p \in M. \tag{2.2}$$

Denn sei $U = B_{\frac{\varrho}{2}}(p)$ mit $\varrho = \varrho(p)$. Dann ist $g(U) = B_{\frac{\varrho}{2}}(g(p))$, und für $q \in g(U) \cap U$ folgt

$$d(g(p), p) \leq d(g(p), q) + d(q, p) < \frac{\varrho}{2} + \frac{\varrho}{2} = \varrho, \quad \text{also } g = \mathrm{id}_M.$$

Weiter ergibt sich Bedingung (ii) aus der Forderung

$$\delta(p, q) = \inf\{d\big(g(p), h(q)\big) : g, h \in \Gamma\} > 0 \quad \text{falls } \Gamma \cdot p \neq \Gamma \cdot q. \tag{2.3}$$

Man bezeichnet $\delta(p, q)$ auch als Bahnenabstand von $p$ und $q$, offenbar gilt $\delta(p', q') = \delta(p, q)$ für alle $p' \in \Gamma \cdot p$, $q' \in \Gamma \cdot q$. Wir wählen als Umgebungen $U = B_{\delta/2}(p)$ und $V = B_{\delta/2}(q)$ mit $\delta = \delta(p, q) > 0$. Angenommen es gibt $x \in g(U) \cap h(V) = B_{\delta/2}(g(p)) \cap B_{\delta/2}(h(q))$, dann folgt

$$d\big(g(p), h(q)\big) \leq d(g(p), x) + d(x, h(q)) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \quad \text{Widerspruch.}$$

Als Anwendung betrachten wir zwei Beispiele.

**Beispiel 2.6** Die Gruppe $\Gamma = \{\pm\mathrm{id}\}$ operiert isometrisch auf $\mathbb{S}^n$ bezüglich des Euklidischen Abstands $d(p, q) = |p - q|$. Es gilt

$$\begin{aligned} \varrho(p) &= d(-p, p) = 2 \quad \text{für alle } p \in \mathbb{S}^n, \\ \delta(p, q) &= \min\big(|p - q|, |(-p) - q|\big) > 0 \quad \text{für alle } p, q \in \mathbb{S}^n,\ q \neq \pm p. \end{aligned}$$

Die Bedingungen (2.2) und (2.3) sind also erfüllt. Allgemein gilt das immer, wenn eine endliche Gruppe (Fixpunkt-)frei operiert.

**Beispiel 2.7** Betrachte auf $\mathbb{R}^n$ die Operation von $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ durch

$$\tau_k(p) = p + k \quad \text{für } p \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}^n.$$

Die Operation ist bezüglich der Euklidischen Metrik isometrisch, denn es gilt

$$d(\tau_k(p), \tau_k(q)) = |(p + k) - (q + k)| = |p - q| = d(p, q).$$

Wir haben $\varrho(p) = \inf\{|(p + k) - p| : k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}\} = 1 > 0$. Weiter folgt mit einem einfachen Kompaktheitsargument

$$\delta(p, q) = \inf\{|q - p + k| : k \in \mathbb{Z}^n\} > 0 \quad \text{falls } q - p \notin \mathbb{Z}^n.$$

Somit ist auch diese Operation eigentlich diskontinuierlich im Sinne von Definition 2.4.

**Definition 2.5** *Eine stetige und surjektive Abbildung $\pi : M \to X$ zwischen topologischen Räumen heißt Überlagerung, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U$ gibt, so dass*

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

*mit $V_i \subset M$ offen, paarweise disjunkt und $\pi|_{V_i} : V_i \to U$ homeomorph.*

Ein solches $U$ heißt Umgebung mit Überlagerungseigenschaft. Finden Sie für die vorigen zwei Beispiele eine solche Umgebung.

**Beispiel 2.8** Standardbeispiel einer Überlagerung ist $c : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $c(s) = (\cos s, \sin s)$. Zu $(1,0) \in \mathbb{S}^1$ wähle als Umgebung mit Überlagerungseigenschaft

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{S}^1 : x > 0\}.$$

Es gilt $c(s) \in U$ genau wenn $\cos s > 0$, also ist $c^{-1}(U)$ die Vereinigung der Intervalle $I_k = \big(2\pi k - \frac{\pi}{2}\,, 2\pi k + \frac{\pi}{2}\big)$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Genauer ist $c|_{I_k} : I_k \to U$ bijektiv, mit Umkehrfunktion

$$\varphi_k : U \to I_k,\ \varphi_k(x,y) = 2\pi k + \arcsin y.$$

Denn für $s \in I_k$, also $\alpha = s - 2\pi k \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, berechnen wir

$$\varphi_k(c(s)) = 2\pi k + \arcsin(\sin s) = 2\pi k + \arcsin(\sin\alpha) = 2\pi k + \alpha = s.$$

Somit ist $c|_{I_k} : I_k \to U$ ein Homeomorphismus, und $U$ hat die Überlagerungseigenschaft. Für $\omega \in \mathbb{S}^1$ beliebig gilt das analog für $U_\omega = \{z \in \mathbb{S}^1 : \langle \omega, z\rangle > 0\}$ (Übungsaufgabe).

**Bemerkung 2.1** Sei $\pi : M \to X$ Überlagerung und $X$ zusammenhängend. Dann ist $\operatorname{card} \pi^{-1}\{x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ für alle $x \in X$ gleich, diese Zahl heißt Grad der Überlagerung. Denn ist $U$ Umgebung von $x \in X$ mit $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ wie in Definition 2.5, so gilt

$$\operatorname{card} \pi^{-1}\{x'\} = \operatorname{card} I = \operatorname{card} \pi^{-1}\{x\} \qquad \text{für alle } x' \in U.$$

Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist daher $X_k = \{x \in X : \operatorname{card} \pi^{-1}\{x\} = k\}$ offen. Wegen $X \backslash X_k = \bigcup_{\ell \neq k} X_\ell$ ist $X_k$ auch abgeschlossen. Wählen wir $k$ mit $X_k \neq \emptyset$ so folgt $X = X_k$.

**Satz 2.2 (diskrete Quotienten)** *Sei $M$ eine $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit, auf der die Gruppe $\Gamma \subset \operatorname{Diff}(M)$ eigentlich diskontinuierlich operiert. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *$X = M/\Gamma$ ist Hausdorffsch mit abzählbarer Basis, und $\pi : M \to M/\Gamma$ ist Überlagerung.*

(ii) *Es gibt genau eine differenzierbare Struktur auf $M/\Gamma$, so dass $\pi$ lokal diffeomorph ist.*

Beweis: Es ist schon bekannt dass $\pi : M \to X$ offene Mengen in offene Mengen abbildet, und dass $X$ abzählbare Basis hat. Sei $x = \pi(p) \in X$. Nach Voraussetzung hat $p$ eine offene Umgebung $U$ mit $g(U) \cap U = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_M\}$. Wir zeigen nun dass die Umgebung $\pi(U)$ von $x$ die Überlagerungseigenschaft hat. Und zwar gilt

$$\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(U).$$

Die Vereinigung ist disjunkt, denn für $g_1 \neq g_2$ ist $g_1(U) \cap g_2(U) = g_2^{-1} g_1(U) \cap U = \emptyset$. Wir behaupten nun dass $\pi : g(U) \to \pi(U)$ bijektiv ist. Es gilt $\pi(g(p)) = \pi(p)$, somit ist die Abbildung surjektiv. Sei $\pi(q_1) = \pi(q_2)$ für $q_i \in g(U)$. Dann folgt $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ für $p_i = g^{-1}(q_i) \in U$, also gibt es $g' \in \Gamma$ mit $g'(p_1) = p_2$. Dann ist $g'(U) \cap U \neq \emptyset$, und somit $g' = \mathrm{id}_M$ und weiter $p_1 = p_2$ bzw. $q_1 = q_2$. Damit ist die Bijektivität gezeigt. Nun ist $\pi$ stetig und bildet offen in offen ab, das heißt die Abbildung ist homeomorph. Also ist $\pi : M \to X$ eine Überlagerung.

Zum Beweis der Hausdorff-Eigenschaft seien $p, q \in M$ mit $\pi(p) \neq \pi(q)$. Für $U, V$ wie in Definition 2.3(ii) sind $\pi(U)$, $\pi(V)$ offene Umgebungen der Punkte $\pi(p), \pi(q) \in X$, da $\pi$ offen ist. Wäre $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$, so gibt es $p' \in U$, $q' \in V$ mit $\pi(p') = \pi(q')$, also $g(p') = q'$ für ein $g \in \Gamma$. Aber $g(U) \cap V = \emptyset$ nach Wahl von $U, V$, ein Widerspruch. Insgesamt ist nun Aussage (i) gezeigt.

Als nächstes konstruieren wir die differenzierbare Struktur. Wie bereits gezeigt, gibt es zu $p \in M$ eine Umgebung $U_p$ mit folgenden Eigenschaften:

- $g(U_p) \cap U_p = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_M\}$
- es gibt eine Karte $\psi_p : U_p \to \psi_p(U_p) \subset \mathbb{R}^m$.

Definiere nun auf $X$ die Karten

$$\varphi_p = \psi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1} : \pi(U_p) \to \psi_p(U_p) \subset \mathbb{R}^m.$$

Die $\varphi_p$ sind homeomorph, zu zeigen bleibt die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel. Sei $x = \pi(p') = \pi(q')$ mit $p' \in U_p$, $q' \in U_q$; wir zeigen dass der Kartenwechsel auf einer Umgebung von $\varphi_p(x) = \psi_p(p')$ differenzierbar ist. Es gilt $q' = g(p')$ für ein $g \in \Gamma$, und

$$\pi|_{U_q} \circ g = \pi|_{U_p} \text{ bzw. } g = \big(\pi|_{U_q}\big)^{-1} \circ \pi|_{U_p} \quad \text{auf } U_p \cap g^{-1}(U_q).$$

Daraus folgt auf der Umgebung $\psi_p\big(U_p \cap g^{-1}(U_q)\big) \ni \psi_p(p')$

$$\varphi_q \circ \varphi_p^{-1} = \big(\psi_q \circ (\pi|_{U_q})^{-1}\big) \circ \big(\psi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1}\big)^{-1} = \psi_q \circ g \circ \psi_p^{-1}.$$

Die rechte Seite ist die Koordinatendarstellung des Diffeomorphismus $g$, also in $C^\infty$. Sei schließlich $\mathcal{A}$ ein Atlas auf $X$, so dass $\pi : M \to X$ lokal diffeomorph ist. Dann ist für jede Karte $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ in $\mathcal{A}$ und jede Karte $\psi_p : U_p \to \psi_p(U_p)$ die zugehörige Koordinatendarstellung

$$\varphi \circ \pi \circ \psi_p^{-1} : \varphi_p\big(\pi(U_p) \cap \Omega\big) \to \varphi\big(\pi(U_p) \cap \Omega\big)$$

diffeomorph. Wegen $\pi \circ \psi_p^{-1} = \varphi_p^{-1}$ sind also die Kartenwechsel $\varphi \circ \varphi_p^{-1}$ differenzierbar, das heißt $\mathcal{A}$ definiert dieselbe differenzierbare Struktur. $\square$

**Definition 2.6** *Sei $X$ wegzusammenhängender topologischer Raum. Eine Schleife in $X$ ist eine stetige Kurve $c : [0,1] \to X$, $c = c(s)$, mit $c(0) = c(1)$. Zwei Schleifen $c_0, c_1$ heißen homotop, wenn es ein $h \in C^0([0,1] \times [0,1], X)$, $h = h(s,t)$, gibt mit*

$$h(s,0) = c_0(s) \;\; \textit{und} \;\; h(s,1) = c_1(s) \quad \textit{für alle } s \in [0,1].$$

*Ist dabei $c_0$ konstant, so heißt $c_1$ nullhomotop.*

**Definition 2.7** *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum $X$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife $c : [0,1] \to X$ nullhomotop ist.*

**Beispiel 2.9** Jede konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend, und allgemeiner jede sternförmige Menge. Die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind einfach zusammenhängend genau für $n \geq 2$.

**Satz 2.3** *Sei $X$ eine zusammenhängende, $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine einfach zusammenhängende, $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M$ und eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Diff}\,(M)$, die eigentlich diskontinuierlich operiert, so dass $X$ diffeomorph ist zu $M/\Gamma$.*

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass das Studium von Mannigfaltigkeiten in zwei Schritte zerlegt wird, nämlich erstens das Studium der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten $M$ und zweitens das Studium der eigentlich diskontinierlichen Gruppenoperationen auf solchen $M$. Zumindest ist das theoretisch so.

# 3 Tangentialvektoren und Differential

Die Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : M \to N$ ist über ihre Koordinatendarstellungen definiert, unabhängig von der Wahl der der Koordinaten. Doch was ist die Ableitung von $f$? Hierzu müssen wir als erstes erklären, was der Tangentialraum von $M$ im Punkt $p$ sein soll. Es gibt drei verschiedene Zugänge:

a) geometrisch als Tangentenvektoren von Kurven

b) physikalisch mittels Koordinatenvektoren

c) algebraisch als Ableitungsoperatoren

Wir beginnen mit dem ersten Zugang. Die Idee ist, den Tangentialvektor durch Kurven zu repräsentieren. Dabei sind Kurven als äquivalent anzusehen, wenn ihre Koordinatendarstellung die gleiche Ableitung hat.

**Definition 3.1 (Tangentialraum)** *Sei $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein Tangentialvektor im Punkt $p \in M$ ist eine Äquivalenzklasse $[c]$ von $C^1$-Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c(0) = p$, unter folgender Äquivalenzrelation:* *

$$c_1 \sim c_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0) \text{ für eine (und damit alle) Karte } \varphi : U \to \varphi(U) \text{ von } M.$$

*Die Menge aller Tangentialvektoren in $p$ heißt Tangentialraum $T_pM$.*

Der Zusatz *und damit alle* ergibt sich wie folgt. Sei $\psi : V \to \psi(V)$ eine weitere Karte mit $p \in V$. Dann ist $c(t) \in U \cap V$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, und es folgt

$$(\psi \circ c)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c)'(0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(\varphi \circ c)'(0). \tag{3.1}$$

**Beispiel 3.1** Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in U$ ist $T_xU$ kanonisch bijektiv zu $\mathbb{R}^n$ vermöge der Abbildung

$$T_xU \to \mathbb{R}^n,\ [c] \mapsto c'(0).$$

Die Injektivität folgt unmittelbar aus der Definition des Tangentialvektors. Für die Surjektivität betrachte für gegebenes $v \in \mathbb{R}^n$ die Kurve

$$c_{x,v} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U,\ c_{x,v}(t) = x + tv \quad \text{mit } \varepsilon > 0 \text{ hinreichend klein.} \tag{3.2}$$

Offenbar gilt dann $[c_{x,v}] \mapsto v$.

Das Differential kann nun als Abbildung zwischen den Tangentialräumen erklärt werden.

**Definition 3.2** *Seien $M, N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f \in C^1(M, N)$. Die Ableitung von $f$ im Punkt $p$ ist die Abbildung*

$$Df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N,\ [c] \mapsto [f \circ c].$$

Wir werden auf $T_pM$ bzw. $T_{f(p)}N$ eine Vektorraumstruktur definieren, so dass $Df(p)$ eine lineare Abbildung ist.

---

*Dabei kann $\varepsilon > 0$ von $c$ abhängen, und die Darstellung $\varphi \circ c$ muss nur nahe bei $t = 0$ definiert sein.

**Lemma 3.1** *Die Ableitung $Df(p)$ von $f \in C^1(M,N)$ ist wohldefiniert.*

Beweis: Wir leiten dazu eine Transformationsformel her. Für $p \in M$ seien $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ Karten von $M$ bzw. $N$ mit $p \in U$ und $f(U) \subset V$. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine $C^1$-Kurve mit $c(0) = p$. Dann folgt aus der Standard Kettenregel

$$(\psi \circ f \circ c)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c)'(0) = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(\varphi \circ c)'(0). \tag{3.3}$$

Also folgt aus $c_1 \sim c_2$ auch $f \circ c_1 \sim f \circ c_2$, das heißt $Df(p)([c])$ ist wohldefiniert. □

**Beispiel 3.2** Hier geht es um die Beziehung zur üblichen Ableitung im $\mathbb{R}^n$. Sei zuerst $f \in C^1(M,V)$ mit $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Wir fassen die $Df(p)$ aus Definition 3.2 als Abbildung nach $\mathbb{R}^m$ auf, indem wir $T_{f(p)}V$ mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren nach Beispiel 3.1. Das ergibt

$$Df(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n,\ [c] \mapsto [f \circ c] \mapsto (f \circ c)'(0).$$

Sei nun $f \in C^1(U,N)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir fassen dann $Df(x)$, $x \in U$, als Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $T_{f(x)}N$ auf, indem wir nun $T_xU$ mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren nach Beispiel 3.1:

$$Df(x) : \mathbb{R}^n \to T_{f(x)}N,\ v \mapsto [c_{x,v}] \mapsto [f \circ c_{x,v}] \quad \text{wobei } c_{x,v}(t) = x + tv.$$

Sei schließlich $f \in C^1(U,V)$ mit offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$. Mit obigen Identifikationen bildet $Df(x)$ wie folgt ab:

$$Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto [f \circ c_{x,v}] \mapsto (f \circ c_{x,v})'(0) = Df(x)v.$$

Dabei ist rechts die gewöhnliche mehrdimensionale Ableitung gemeint. Somit ist unsere Bezeichnung mit der gewohnten Notation im $\mathbb{R}^n$ konsistent.

**Satz 3.1** *Seien $M, N, P$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ist $f \in C^1(M,N)$ und $g \in C^1(N,P)$, so folgt $g \circ f \in C^1(M,P)$ und es gilt*

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p) \quad \text{für alle } p \in M.$$

Beweis: Die Aussage $g \circ f \in C^1(M,P)$ wurde bereits in (2.1) gezeigt. Ist $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine $C^1$-Kurve mit $c(0) = p$, so gilt nach Definition

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(p)([c]) &= [(g \circ f) \circ c] \\ &= [g \circ (f \circ c)] \\ &= Dg(f(p))\big([f \circ c]\big) \\ &= Dg(f(p))\big(Df(p)([\,c\,])\big). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

**Satz 3.2** *Sei $M$ eine $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte und $p \in U$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Die Abbildung $D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^m$ ist definiert und bijektiv.*

(ii) *Ist $\psi : V \to \psi(V)$ eine weitere Karte mit $p \in V$, so gilt*

$$D\psi(p) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\, D\varphi(p).$$

(iii) *Es gibt eine eindeutig bestimmte Vektorraumstruktur auf $T_pM$, so dass die Abbildung $D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^m$ linear (und damit isomorph) ist.*

Beweis: Nach Beispiel 3.2 ist $D\varphi(p)$ gegeben durch

$$D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^m,\ D\varphi(p)([c]) = (\varphi \circ c)'(0).$$

Genau genommen haben wir das Differential nur für $C^1$-Funktionen auf ganz $M$ definiert. Aber die $C^1$-Eigenschaft mittels Kartendarstellungen lässt sich offensichtlich auf Abbildungen $f : \Omega \to N$ mit $\Omega \subset M$ offen verallgemeinern, man nimmt nur Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $U \subset \Omega$; diese ergeben sich durch Einschränkung auf $\Omega$. Insbesondere gilt hier $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, denn $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi(U)}$, vgl. Definition 2.1. Nach Definition des Tangentialvektors ist $D\varphi(p)$ injektiv. Für die Surjektivität setze $c_{x,v}(t) = x + tv$ mit $x = \varphi(p) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$, vgl. Beispiel 3.1. Dann ist $c = \varphi^{-1} \circ c_{x,v}$ eine $C^1$-Kurve wegen $\varphi \circ c = c_{x,v}$, und es gilt

$$D\varphi(p)([c]) = (\varphi \circ c)'(0) = c'_{x,v}(0) = v. \tag{3.4}$$

Damit ist Behauptung (i) gezeigt.

Behauptung (ii) wurde schon in (3.3) gezeigt, genauer hatten wir dort

$$(\psi \circ c)'(0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\,(\varphi \circ c)'(0).$$

Nach Beispiel 3.2 ist $(\psi \circ c)'(0) = D\psi(p)([c])$ und $(\varphi \circ c)'(0) = D\varphi(p)([c])$, und (ii) folgt.

Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte mit $p \in U$. Für $X, Y \in T_pM$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei eine Addition $X \oplus Y$ und eine Skalarmultiplikation $\lambda \odot X$ gegeben, so dass $D\varphi(p)$ linear ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} D\varphi(p)(X \oplus Y) &= D\varphi(p)(X) + D\varphi(p)(Y), \\ D\varphi(p)(\lambda \odot X) &= \lambda\, D\varphi(p)(X). \end{aligned}$$

Da $D\varphi(p)$ injektiv ist, sind $X \oplus Y$ und $\lambda \odot X$ hierdurch eindeutig bestimmt. Da $D\varphi(p)$ auch surjektiv ist, können wir umgekehrt $X \oplus Y$ und $\lambda \odot X$ durch die Gleichungen definieren. Man prüft nach, dass sich die Vektorraumaxiome von $\mathbb{R}^m$ auf $T_pM$ übertragen. Das neutrale Element der Addition ist $0_p = D\varphi(p)^{-1}(0)$, es gilt $0_p = [c_0]$ mit $c_0(t) \equiv p$, die konstante Kurve. Das zu $X \in T_pM$ inverse Element bzgl. $\oplus$ ist $-X := D\varphi(p)^{-1}\big(-D\varphi(p)(X)\big)$. Ist $X = [c]$ so gilt $-X = [\hat{c}]$ mit $\hat{c}(t) = c(-t)$. Die Linearität von $D\varphi(p)$ gilt nach Definition. Es bleibt zu zeigen, dass die Definition nicht von der Karte abhängt. Ist $\psi : V \to \psi(V)$ eine andere Karte mit $p \in V$, so gilt nach (ii)

$$D\psi(p) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) D\varphi(p),$$

das heißt $D\psi(p)$ ist linear bezüglich der durch $\varphi$ definierten Vektorraumstruktur. Wegen der Eindeutigkeit muss diese gleich der durch $\psi$ definierten Struktur sein. □

**Definition 3.3** *Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$, $x = \varphi(p)$, Karte auf der $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M$ und $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Nach Satz 3.2 bilden dann die Vektoren*

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = D\varphi(p)^{-1} e_j \in T_pM \qquad \text{mit } j = 1, \ldots, n$$

*eine Basis von $T_pM$, die als Standardbasis bzgl. der Karte $\varphi$ bezeichnet wird. Der Vektor $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ wird durch die Kurve $\varphi^{-1} \circ c_{x,e_j}$ repräsentiert, wobei $c_{x,e_j}(t) = x + te_j$.*

Die letzte Aussage gilt wegen

$$D\varphi(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = e_j \quad \text{ und } \quad D\varphi(p)[\varphi^{-1}\circ c_{x,e_j}] = (\varphi\circ\varphi^{-1}\circ c_{x,e_j})'(0) = e_j.$$

Wir bezeichnen die Basisvektoren stets mit den Buchstaben der entsprechenden Koordinaten, zum Beispiel sind $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ die Basisvektoren zu den Polarkoordinaten $r, \theta, \varphi$ auf $\mathbb{R}^3$. Bei dieser Notation muss allerdings klar sein, bezüglich welcher Karte $\varphi$ die Standardbasis gebildet wird. In Folgerung **??** wird erklärt, warum die Basisvektoren als partielle Ableitungen geschrieben werden.

**Beispiel 3.3** Ein $C^1$-Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V$ im $\mathbb{R}^n$ kann als Karte aufgefasst werden. Setzen wir $f = \varphi^{-1}$, so lautet die zugehörige Standardbasis im Punkt $p \in U$ gemäß Definition 3.3

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = Df(\varphi(p))e_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}(\varphi(p)).$$

Insbesondere erhalten wir für $f = \mathrm{id}_U$ die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$. Im allgemeinen werden die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ aber von $p$ abhängen. Im Fall der Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} f : (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3\backslash\{(x,y,z) : x \geq 0,\ y = 0\},\\ f(r,\theta,\varphi) &= (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta). \end{aligned}$$

Die Standardbasis bezüglich $\varphi$ im Punkt $p = f(r,\theta,\varphi)$ lautet somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(p) &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),\\ \frac{\partial}{\partial \theta}(p) &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta),\\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(p) &= (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0). \end{aligned}$$

Als Funktion von $p = (x,y,z)$ erhalten wir für die Basis

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(p) &= \frac{\big(x,y,z\big)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \frac{\partial}{\partial \theta}(p) &= \frac{\big(zx, zy, -(x^2+y^2)\big)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(p) &= \big(-y, x, 0\big). \end{aligned}$$

**Folgerung 3.1** *Sei $M$ eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $X \in T_pM$. Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$, mit $\varphi(p) = x$ hat $X$ die Koordinatendarstellung*

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \qquad \textit{mit } X^i = D\varphi^i(p)X. \tag{3.5}$$

*Ist $\psi : V \to \psi(V)$, $\psi(p) = y$, eine weitere Karte, so transformieren sich die Koordinatenvektoren mit der Jacobimatrix des Kartenwechsels:*

$$X_\psi = D(\psi\circ\varphi^{-1})(x)X_\varphi \quad \textit{und} \quad \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}(x)\,\frac{\partial}{\partial y^i}(p). \tag{3.6}$$

Beweis: Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, $1 \leq i \leq n$, bilden eine Basis von $T_pM$, also gilt die Darstellung für gewisse $X^i \in \mathbb{R}$. Wir berechnen mit $X = [c]$

$$\sum_{i=1}^n X^i e_i = D\varphi(p)X = (\varphi \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^n (\varphi^i \circ c)'(0)\, e_i = \sum_{i=1}^n \big(D\varphi^i(p)X\big)\, e_i.$$

Die erste Behauptung folgt durch Koeffizientenvergleich. Weiter gilt

$$X_\psi = D\psi(p)X = D(\psi \circ \varphi^{-1})(x) D\varphi(p)X = D(\psi \circ \varphi^{-1})(x) X_\varphi.$$

Die Formel für die Basisvektoren ergibt sich mit $X = \frac{\partial}{\partial x^j}(p)$, den dann ist $X_\varphi = e_j$. □

**Satz 3.3** *Seien $M$, $N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $n$ bzw. $m$ und $f \in C^1(M,N)$. Dann ist die Abbildung $Df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ linear. Sind $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ und $\psi : V \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ Karten mit $p \in U$ und $f(U) \subset V$, so gilt*

$$D\psi(f(p)) Df(p) (D\varphi(p))^{-1} = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)). \tag{3.7}$$

*Bezüglich $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$, $j = 1, \ldots, n$, bzw. $\frac{\partial}{\partial y^i}(f(p))$, $i = 1, \ldots, m$ hat $Df(p)$ die Matrix*

$$\left(\frac{\partial(\psi^i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right)(\varphi(p)) \in \mathbb{R}^{m \times n}. \tag{3.8}$$

Beweis: Formel (3.7) folgt aus der Kettenregel, Satz 3.1. Beachte dabei

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_U \quad \Rightarrow \quad D\varphi(p) D(\varphi^{-1})(\varphi(p)) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}.$$

$D\varphi(p)$ und $D\psi(f(p))$ sind Vektorraum-Isomorphismen, und $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ ist die gewöhnliche Ableitung, vgl. Beispiel 3.2. Damit ist auch $Df(p)$ linear. Für die zugehörige Matrix berechnen wir

$$\begin{aligned}
Df(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p) &= D\psi(f(p))^{-1} D\psi(f(p)) Df(p) D\varphi(p)^{-1} e_j \\
&= D\psi(f(p))^{-1} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\, e_j \\
&= D\psi(f(p))^{-1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\psi^i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p))\, e_i \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\psi^i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p))\, \frac{\partial}{\partial y^i}(f(p)).
\end{aligned}$$

□

In der Physik ist es üblich, eine Funktion in Koordinaten zu schreiben. Die Koordinaten und die zugehörigen Komponenten der Funktion werden mit demselben Buchstaben bezeichnet. In der Situation hier ergibt sich die Notation $f^i(p) := \psi^i \circ f(p)$. Die Matrix von $Df(p)$ hat dann die Einträge

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) := \frac{\partial(\psi^i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)). \tag{3.9}$$

Es kann dann gerechnet werden wie es mit partiellen Ableitungen üblich ist. Das ist ziemlich praktisch, im Kapitel über die Lieklammer werden wir das zum Beispiel benutzen.

**Beispiel 3.4** Wir betrachten hier den Spezialfall einer $C^1$-Kurve $\gamma : I = (a,b) \to M$. Bezüglich der Karte $\varphi = \mathrm{id}_I$ haben wir den Basisvektor

$$\frac{\partial}{\partial t}(t_0) = 1 \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor ist durch $c_{t_0,1}(t) = t_0 + t$ repräsentiert, denn $c'_{t_0,1}(t_0) = 1$. Für $f \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ berechnen wir nach Beispiel 3.2

$$Df(t_0)\frac{\partial}{\partial t}(t_0) = (f \circ c_{t_0,1})'(t_0) = \frac{d}{dt} f(t_0 + t)|_{t=t_0} = f'(t_0).$$

Wir definieren nun den Tangentialvektor von $\gamma$ in $t_0$ durch

$$\gamma'(t_0) := D\gamma(t_0)\frac{\partial}{\partial t}(t_0).$$

Damit folgt in einer Karte $\psi : V \to \psi(V)$ von $M$ mit der Kettenregel

$$D\psi(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = D\psi(\gamma(t_0))D\gamma(t_0)\frac{\partial}{\partial t}(t_0) = D(\psi \circ \gamma)(t_0)\frac{\partial}{\partial t}(t_0) = (\psi \circ \gamma)'(t_0).$$

**Beispiel 3.5** Sei $N$ eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit. $M \subset N$ heißt $m$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^\infty$, wenn es zu jedem $p \in M$ eine $M$-adaptierte Karte $g : W \to g(W)$ von $N$ gibt mit $p \in W$, das heißt

$$g(M \cap W) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap g(W). \tag{3.10}$$

$M$ ist mit der Relativtopologie ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Um einen Atlas zu definieren, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} &\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, \quad \iota(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0),\\ &\pi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m, \quad \pi(y^1, \ldots, y^n) = (y^1, \ldots, y^m). \end{aligned}$$

Für eine $M$-adaptierte Karte $g : W \to g(W)$ setzen wir nun

$$\varphi_g : U_g := M \cap W \to \varphi_g(U_g),\ \varphi_g = \pi \circ g|_{M \cap W}.$$

Dann gilt $\varphi_g^{-1} = f \circ \iota|_{\varphi_g(U_g)}$, wobei $f = g^{-1} : g(W) \to W$ die Umkehrabbildung der Karte $g$ bezeichnet. Insbesondere ergeben sich die Kartenwechsel

$$\begin{aligned} \varphi_{g'} \circ \varphi_g^{-1}|_{\varphi_g(U_g \cap U_{g'})} :\ & g(M \cap W \cap W') \to g'(M \cap W \cap W'),\\ \varphi_{g'} \circ \varphi_g^{-1}\ & = \pi \circ (g' \circ g^{-1}) \circ \iota|_{g(M \cap W \cap W')}. \end{aligned}$$

Damit ist auf $M$ ein differenzierbarer Atlas gegeben. Die Inklusionsabbildung $i : M \subset N$ ist bezüglich dieser Struktur differenzierbar, denn in den Karten gilt

$$g \circ i \circ \varphi_g^{-1} = \iota|_{(\pi \circ g)(M \cap W)} \in C^\infty(\varphi_g(U_g)).$$

Aus $i = f \circ \iota \circ \varphi_g$ auf $M \cap W$ folgt $Di(p) = Df(g(p)\,\iota\, D\varphi_g(p)$ für $p \in M \cap W$. Somit ist die lineare Abbildung

$$Di(p) : T_pM \to \mathrm{Bild}\, Df(x,0)|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}} \subset T_pN, \qquad \text{wobei } x = \varphi_g(p) = (\pi \circ g)(p),$$

ein Isomorphismus. Die Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x^j}(p) \in T_pM$ bzgl. der Karte $\varphi_g$ werden mit den Vektoren $Df(x,0)(e_j, 0) \in T_pN$ mit $j = 1, \ldots, m$ identifiziert.

# 4 Tangentialbündel und Vektorfelder

Wir wollen die Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit $M$ zu einem Gesamtobjekt zusammenfassen, dazu bilden wir die disjunkte Vereinigung

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Sei $\pi : TM \to M$ die Projektion auf den Fußpunkt, also $\pi(X) = p$ für $X \in T_pM$. Natürlich soll $TM$ wieder eine Mannigfaltigkeit sein. Für jede Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ im maximalen Atlas $\mathcal{A}$ von $M$ haben wir die induzierte Karte

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n,\ \Phi(X) = \big(\varphi(p), D\varphi(p)X\big) \text{ für } X \in T_pM. \tag{4.1}$$

Die Abbildung $\Phi$ ist bijektiv, aber von Stetigkeit können wir nicht reden, uns fehlt noch eine Topologie auf $TM$. Der folgende Satz liefert ein grundsätzliches Verfahren, um auf einer Menge $M$ mit potentiellen Karten eine Topologie und damit die Struktur einer Mannigfaltigkeit zu erklären.

**Satz 4.1** *Sei $M$ eine Menge und $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, ein System von bijektiven Abbildungen von $U_\lambda \subset M$ auf offene Mengen $V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$. Es gelte:*

(1) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$.

(2) $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ *ist offen für alle* $\lambda, \mu \in \Lambda$.

(3) $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ *ist stetig für alle* $\lambda, \mu \in \Lambda$.

*Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf $M$, so dass $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ein $C^0$-Atlas ist. Wird $M$ durch eine abzählbare Teilfamilie $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda'\}$ überdeckt, so hat $\mathcal{O}$ abzählbare Basis.*

**Bemerkung:** Um zu zeigen, dass $M$ eine $C^0$-Mannigfaltigkeit ist, ist im Einzelfall noch die Hausdorff-Eigenschaft nachzuweisen!

Beweis: (von Satz 4.1) Wir definieren die gesuchte Topologie durch

$$\mathcal{O} = \{U \subset M : \varphi_\lambda(U \cap U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n \text{ ist offen für alle } \lambda \in \Lambda\}.$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie, wie sich aus folgenden Tatsachen ergibt:

(i) $\varphi_\lambda(M \cap U_\lambda) = V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ ist offen nach Voraussetzung.

(ii) Für $W_\alpha \subset M$, $\alpha \in A$, gilt $\varphi_\lambda((\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha) \cap U_\lambda) = \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\lambda(W_\alpha \cap U_\lambda)$.

(iii) Für $W_i \subset M$, $i = 1, \ldots, N$, gilt $\varphi_\lambda((\bigcap_{i=1}^N W_i) \cap U_\lambda) = \bigcap_{i=1}^N \varphi_\lambda(W_i \cap U_\lambda)$.

Bezüglich $\mathcal{O}$ sind die Mengen $U_\lambda$ offen nach Voraussetzung (2). Weiter ist $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ stetig, denn für $V \subset V_\lambda$ offen und $\mu \in \Lambda$ ist

$$\varphi_\mu(\varphi_\lambda^{-1}(V) \cap U_\mu) = \underbrace{(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})}_{(\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1})^{-1}}(V \cap \underbrace{\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)}_{\text{offen}})$$

offen. Schließlich ist $\varphi_\lambda^{-1} : V_\lambda \to U_\lambda$ nach Definition stetig, denn für $U \in \mathcal{O}$ mit $U \subset U_\lambda$ ist $\varphi_\lambda(U) = \varphi(U \cap U_\lambda)$ offen. Damit sind die $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ Homeomorphismen und bilden einen $C^0$-Atlas auf $M$.

Zur Eindeutigkeit dieser Topologie: sei $\mathcal{O}'$ eine Topologie, so dass die $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ homeomorph sind. Für $U \in \mathcal{O}$ folgt dann

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda^{-1}(\underbrace{\varphi_\lambda(U \cap U_\lambda))}_{\text{offen}} \in \mathcal{O}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O} \subset \mathcal{O}'.$$

Ist umgekehrt $U \in \mathcal{O}'$, so ist $U \cap U_\lambda \in \mathcal{O}'$ und $\varphi_\lambda(U \cap U_\lambda)$ ist offen, für alle $\lambda \in \Lambda$. Dies bedeutet $U \in \mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.

Schließlich gelte $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ mit $\Lambda'$ abzählbar. Jedes $V_\lambda$ hat eine abzählbare Basis $\{V_{\lambda,i} : i \in \mathbb{N}\}$ bezüglich der Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\{U_{\lambda,i} = \varphi_\lambda^{-1}(V_{\lambda,i}) : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis für $U_\lambda$ und somit $\{U_{\lambda,i} : \lambda \in \Lambda',\, i \in \mathbb{N}\}$ abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{O}$.
$\square$

Wir wenden diese Konstruktion jetzt auf $TM$ an.

**Satz 4.2** *Sei $M$ eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit maximalem Atlas $\mathcal{A}$ und Projektion $\pi : TM \to M$, $\pi(X) = p$ für $X \in T_pM$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Topologie auf $TM$, so dass die Abbildungen*

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n,\ \Phi(X) = \big(\varphi(p), D\varphi(p)X\big) \text{ für } X \in T_pM \quad (\varphi \in \mathcal{A})$$

*einen $C^\infty$-Atlas bilden. Damit ist $TM$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, und die Projektion $\pi : TM \to M$ ist in $C^\infty(TM, M)$.*

Beweis: Die Abbildungen $\Phi$ sind bijektiv, das Bild $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ ist offen, und die Mengen $\pi^{-1}(U)$, $\varphi \in \mathcal{A}$, überdecken $TM$. Für Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ ist die Menge

$$\Phi\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Weiter ist der Kartenwechsel nach Satz 3.2(ii) stetig:

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n &\to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n, \\ (\Psi \circ \Phi^{-1})(x, v) &= \big((\psi \circ \varphi^{-1})(x), D(\psi \circ \varphi^{-1})(x)v\big). \end{aligned}$$

Nach Satz 4.1 gibt es auf $TM$ genau eine Topologie, so dass die $\Phi$ homemorph sind und damit einen $C^\infty$-Atlas von $TM$ bilden, es gilt

$$W \subset TM \text{ offen} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(W \cap \pi^{-1}(U)) \text{ offen für alle } \varphi \in \mathcal{A}.$$

In $\pi^{-1}(U)$ hat die Topologie die Basismengen $\Phi^{-1}(U' \times B_\varrho(a))$ wobei $U' \subset U$ offen, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\varrho > 0$. Das sind also die Vektoren in $\pi^{-1}(U)$ mit Fußpunkt in $U'$ und Koordinaten im Ball $B_\varrho(a)$. Die Projektion $\pi : TM \to M$ ist $C^\infty$, denn in den Karten gilt

$$\varphi \circ \pi \circ \Phi^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \varphi(U),\ \pi(x, v) = x.$$

Nach Satz 1.1(3) hat $M$ einen abzählbaren Atlas $\mathcal{A}'$, und $TM$ wird durch die Mengen $\pi^{-1}(U_\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{A}'$, überdeckt. Somit hat $TM$ eine abzählbare Basis nach Satz 4.1.

Zu zeigen bleibt die Hausdorff-Eigenschaft. Seien $X, Y \in TM$ mit $X \neq Y$. Ist $\pi(X) \neq \pi(Y)$, so gibt es, da $M$ nach Voraussetzung Hausdorffsch, offene Umgebungen $U, V \subset M$ von $\pi(X)$ bzw. $\pi(Y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Die Mengen $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ sind dann disjunkte, offene Umgebungen von $X$ bzw. $Y$. Im Fall $\pi(X) = \pi(Y) =: p$ wähle eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$. Es gilt dann $D\varphi(p)X = v$ und $D\varphi(p)Y = w$ mit $v \neq w$. Die Mengen $\Phi^{-1}(U \times B_\varrho(v))$ und $\Phi^{-1}(U \times B_\varrho(w))$ sind offene Umgebungen von $X, Y$, und mit der Wahl $\varrho = \frac{1}{2}|v - w| > 0$ sind sie disjunkt. $\square$

Wir hatten nach Satz 1.1 die Konvergenz einer Folge von Punkten in einer Mannigfaltigkeit charakterisiert. Das besagt hier Folgendes:

> Seien $X_k \in T_{p_k}M$, $X \in T_pM$, und sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte mit $p \in U$. Dann konvergiert $X_k$ genau dann gegen $X$, wenn $p_k \to p$, insbesondere $p_k \in U$ für $k$ groß, und $(X_k)^i \to X^i$ mit $k \to \infty$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dabei sind $(X_k)^i$ und $X^i$ die Koordinaten bzgl. der Basen $\frac{\partial}{\partial x^i}(p_k)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$.

Die induzierten Karten $\Phi$ haben die spezielle Eigenschaft, dass $\Phi|_{T_pM} = D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n$ linear und damit ein Vektorraumisomorphismus ist, für jedes $p \in U$. Für eine Mannigfaltigkeit dieser Form gibt es die folgende Bezeichnung.

**Definition 4.1 (Vektorbündel)** *Seien $E$ und $M$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $\pi \in C^\infty(E, M)$ heißt Vektorbündel vom Rang $k$ über $M$, falls gilt:*

(i) *Für alle $p \in M$ trägt $E_p = \pi^{-1}\{p\}$ die Struktur eines $k$-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums.*

(ii) *Für alle $p \in M$ existiert eine Umgebung $U \subset M$ und ein Diffeomorphismum der Form*

$$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k, \quad \phi(v) = \big(q, A(q)v\big) \text{ mit } q = \pi(v),$$

*wobei $A(q) : E_q \to \mathbb{R}^k$ ein Vektorraumisomorphismus ist.*

In der Linearen Algebra werden mit einem gegebenen Vektorraum $V$ weitere Vektorräume assoziiert, etwa der Dualraum $V^*$ oder der Raum $\mathrm{End}(V)$ der Endomorphismen von $V$. In unserer Situation ergeben sich so weitere Vektorbündel, das ist der Grund diesen Begriff allgemein einzuführen. Zum Beispiel liefert die Vereinigung der Dualräume $T_p^*M$ das Kotangentialbündel

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Die Beschreibung von $T^*M$ als Mannigfaltigkeit ist ganz analog zu der von $TM$. Das Bündel $\pi : M \times \mathbb{R}^k$, $\pi(p, v) = p$, heißt das triviale Bündel. Eigenschaft (ii) besagt, dass das Bündel *lokal trivial* ist, also ein Produkt $U \times \mathbb{R}^k$. Allgemein heißt $\phi$ in (ii) Bündelkarte oder lokale Trivialisierung.

**Folgerung 4.1** *Seien $M, N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $m$ bzw. $n$. Ist $f \in C^k(M, N)$ mit $k \geq 1$, so ist $Df \in C^{k-1}(TM, TN)$.*

Beweis: Seien $\varphi : U \to \varphi(U)$ bzw. $\psi : V \to \psi(V)$ Karten von $M$ bzw. $N$ mit $f(U) \subset V$. Dann gilt für $x \in \varphi(U)$ und $v \in \mathbb{R}^m$ nach Satz 3.3

$$\Psi \circ Df \circ \Phi^{-1}(x, v) = \big((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x)v\big) \in \psi(V) \times \mathbb{R}^n.$$

Die Behauptung folgt. $\square$

**Definition 4.2** *Ein Vektorfeld auf $M$ ist eine Abbildung $X : M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, also $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Wir bezeichnen den Raum der $C^k$-Vektorfelder mit $C^k(TM)$.*

Die $C^k$-Eigenschaft ist durch die Darstellungen bezüglich Karten definiert. Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte, so lauten die lokalen Darstellungen von $X$ nach Satz 4.2

$$\Phi \circ X \circ \varphi^{-1}(x) = (\varphi(p), X^1(p), \ldots, X^n(p))|_{p=\varphi^{-1}(x)} \quad \text{mit } X^i(p) = D\varphi^i(p)X.$$

Damit ist $X \in C^k(M, TM)$ genau wenn für jede Karte die $X^i \circ \varphi^{-1}$ in $C^k(\varphi(U))$ sind.

Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel. Eine Funktion $X : M \to E$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, das heißt $X(p) \in E_p$ für alle $p \in M$, nennt man einen Schnitt von $E$. In einer lokalen Trivialisierung wie in Definition 4.1(ii) ist $X$ ein Graph, genauer gilt

$$\phi(X(p)) = \big(p\,, A(p)X(p)\big) \in U \times \mathbb{R}^n.$$

Die Differentialgeometer bezeichnen die $C^\infty$-Schnitte mit $\Gamma(E)$. Diese Notation hat den Nachteil, dass sie andere Regularitätsstufen, zum Beispiel stetige oder $C^1$-Schnitte, nicht abdeckt. Ich bezeichne deshalb die $C^k$-Schnitte von $E$ mit $C^k(E)$. Nachteil meiner Notation ist natürlich die Verwechselung mit dem Raum der $C^k$-Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$. Ich hoffe dass sich aus dem Kontext ergibt was gemeint ist.

$C^k(TM)$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der punktweisen Vektorraumstruktur, vgl. Satz 3.2,

$$(\lambda\, X + \mu\, Y)(p) = \lambda\, X(p) + \mu\, Y(p).$$

Ferner können Vektorfelder mit Funktionen multipliziert werden:

$$f \in C^k(M),\ X \in C^k(TM) \quad \Rightarrow \quad fX \in C^k(TM),\ \text{wobei } (fX)(p) = f(p)X(p).$$

Als nächstes geht es um Integralkurven eines Vektorfelds. Dafür brauchen wir den Tangentenvektor einer Kurve $c \in C^1(I, M)$. Die Definition ist im Grunde trivial aber doch etwas mühevoll. Für $t_0 \in I$ betrachte die Kurve $c_{t_0}(s) = c(t_0 + s)$. Diese erfüllt $c_{t_0}(0) = c(t_0)$, repräsentiert also einen Vektor

$$c'(t_0) := [c_{t_0}] \in T_{c(t_0)}M.$$

Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte mit $c(t_0) \in U$, so gilt nach Definition von $D\varphi$ und Beispiel 3.2

$$D\varphi(c(t_0))c'(t_0) = [\varphi \circ c_{t_0}] = (\varphi \circ c_{t_0})'(0) = (\varphi \circ c)'(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Entwickeln wir rechts in die Standardbasis und bilden mit $D\varphi(c(t_0))^{-1}$ zurück ab, so folgt

$$c'(t_0) = \sum_{i=1}^n (\varphi^i \circ c)'(t_0)\, \frac{\partial}{\partial x^i}(c(t_0)). \tag{4.2}$$

Das ist jedenfalls eine nützliche Darstellung. Alternativ können wir auf $\mathbb{R}$ die Standardkarte $\varphi(t) = t$ betrachten, diese hat das eine Basisfeld, siehe Definition 3.3,

$$\frac{\partial}{\partial t}(t_0) = D\varphi(t_0)^{-1}e_1 = e_1 \quad \text{wobei } e_1 = 1 \in \mathbb{R}.$$

Das Basisfeld ist durch die Kurve $\gamma_{t_0,e_1}(s) = t_0 + se_1 = t_0 + s$ repräsentiert, damit ergibt sich

$$c'(t_0) = [c_{t_0}] = [c \circ \gamma_{t_0,e_1}] = Dc(t_0)[\gamma_{t_0,e_1}] = Dc(t_0)\, \frac{\partial}{\partial t}(t_0).$$

**Definition 4.3** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (evtl. uneigentliches) Intervall. $c \in C^1(I, M)$ heißt Integralkurve des Vektorfelds $X \in C^0(TM)$, falls gilt:*

$$c' = X \circ c \quad \Leftrightarrow \quad c'(t) = X(c(t)) \text{ für alle } t \in I. \tag{4.3}$$

*$c$ heißt maximal, wenn es keine Integralkurve $\tilde{c} : \tilde{I} \to M$ gibt mit $I \overset{\subset}{\neq} \tilde{I}$ und $\tilde{c}|_I = c$.*

Genauer könnte man auch die Begriffe rechts- bzw. linksseitig maximal erklären. Wir interessieren uns nun zuerst dafür, wie sich die Gleichung in lokale Koordinaten übersetzt.

**Lemma 4.1** *Sei $M$ eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $X \in C^0(TM)$ ein Vektorfeld auf $M$, mit lokaler Darstellung $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ bezüglich der Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$. Definiere*

$$\xi \in C^0(U, \mathbb{R}^n),\ \xi(x) = D\varphi(p)X(p)|_{p=\varphi^{-1}(x)} = \sum_{i=1}^n X^i(\varphi^{-1}(x))\, e_i.$$

*$c \in C^1(I, U)$ ist genau dann Integralkurve von $X$, wenn für $\gamma(t) = \varphi(c(t))$ gilt:*

$$\gamma' = \xi \circ \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \gamma'(t) = \xi(\gamma(t)) \text{ für alle } t \in I. \tag{4.4}$$

Beweis: Wie oben diskutiert gilt, links mit der Standard Ableitung,

$$\gamma'(t) = (\varphi \circ c)'(t) = D\varphi(c(t))c'(t).$$

Andererseits haben wir wegen $\varphi^{-1}(\gamma(t)) = c(t)$

$$\xi(\gamma(t)) = D\varphi(c(t))X(c(t)).$$

Die Behauptung folgt. □

Gleichung (4.4) ist ein autonomes System von $n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die relevante Theorie im $\mathbb{R}^n$ liefert folgende Aussagen zur Eindeutigkeit und Existenz von Integralkurven, sowie zur Abhängigkeit der Integralkurve vom Anfangswert.

**Satz 4.3** *Sei $X \in C^1(TM)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Sind $c_k : I_k \to M$ Integralkurven von $X$ mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$, so gilt $c_1 = c_2$ auf $I_1 \cap I_2$ und die zusammengesetzte Kurve*

$$c : I_1 \cup I_2 \to M,\ c(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{für } t \in I_1 \\ c_2(t) & \text{für } t \in I_2 \end{cases}$$

*ist wieder eine Integralkurve von $X$.*

(ii) *Zu jedem $p \in M$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem $c'(t) = X(c(t))$, $c(0) = p$, eine Lösung $c_p : (-\delta, \delta) \to M$ hat.*

(iii) *Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U$ und ein $\delta > 0$, so dass die Abbildung*

$$\phi : U \times (-\delta, \delta) \to M,\ \phi(q, t) = c_q(t),$$

*definiert und $C^1$ ist. Ist $X \in C^k(TM)$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $\phi$ eine $C^k$-Abbildung.*

BEWEIS: Für (i) betrachte die Menge $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : c_1(t) = c_2(t)\}$. Nach Definition ist $J$ abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$ und nach Voraussetzung nicht leer, da $t_0 \in J$. Aber $J$ ist auch offen in $I_1 \cap I_2$; dies folgt durch Anwendung des Eindeutigkeitssatzes im $\mathbb{R}^n$ in einer lokalen Karte gemäß Lemma 4.1. Also gilt $J = I_1 \cap I_2$, das heißt die Lösungen stimmen auf $I_1 \cap I_2$ überein. Die Lösungseigenschaft der zusammengesetzten Kurve ist offensichtlich. Die Behauptungen (ii) und (iii) sind direkte Konsequenzen der entsprechenden Aussagen im $\mathbb{R}^n$ zusammen mit Lemma 4.1. $\square$

Ist nur $X \in C^0(TM)$, so gilt das Eindeutigkeitsresultat im allgemeinen nicht. Betrachte dazu die Gleichung $\gamma' = \sqrt{|\gamma|}$ für $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gibt eine Schar von $C^1$-Lösungen mit $\gamma(0) = 0$, die von zwei Parametern $t_1 \leq 0$, $t_2 \geq 0$ abhängt:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-t_1)^2 & t \leq t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \frac{1}{4}(t-t_2)^2 & t \geq t_2. \end{cases}$$

Ein Beispiel dafür, dass die Integralkurven nicht immer auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden können, liefert die Gleichung $\gamma' = \gamma^2$. Die maximale Integralkurve mit $\gamma(0) = x_0 \neq 0$ lautet

$$\gamma(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \text{ mit } \begin{cases} t \in (-\infty, \frac{1}{x_0}) & \text{falls } x_0 > 0, \\ t \in (\frac{1}{x_0}, \infty) & \text{falls } x_0 < 0. \end{cases}$$

**Folgerung 4.2** *Sei $X \in C^1(TM)$. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine maximale Integralkurve $c_p : I_p \to M$ von $X$ mit $c_p(0) = p$, und es gilt:*

(i) *$I_p = (\alpha_p, \omega_p)$ ist ein offenes Intervall mit $-\infty \leq \alpha_p < 0 < \omega_p \leq \infty$.*

(ii) *Ist $c : I \to M$ Integralkurve von $X$ mit $c(0) = p$, so gilt $I \subset I_p$ und $c = c_p|_I$.*

(iii) *Zu $K \subset M$ kompakt gibt es ein $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \subset (\alpha_p, \omega_p)$ für alle $p \in K$.*

BEWEIS: Wir setzen

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \inf\{a < 0 : \text{ es gibt eine Integralkurve } c : (a,0] \to M \text{ mit } c(0) = p\}, \\ \omega_p &= \sup\{b > 0 : \text{ es gibt eine Integralkurve } c : [0,b) \to M \text{ mit } c(0) = p\}. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.3(ii) gilt $\alpha_p < 0 < \omega_p$, und mit Satz 4.3(i) erhalten wir eine wohldefinierte Lösung $c_p : (\alpha_p, \omega_p) \to M$ des Anfangswertproblems. Wäre $c_p$ zum Beispiel auf $(\alpha_p, \omega_p]$ fortsetzbar, so gibt es nach Satz 4.3(ii) für geeignetes $\delta > 0$ eine Integralkurve $c : (\omega_p - \delta, \omega_p + \delta) \to M$ mit $c(\omega_p) = c_p(\omega_p)$, und wir erhalten eine Fortsetzung von $c_p$ auf das Intervall $(\alpha_p, \omega_p + \delta)$ im Widerspruch zur Definition von $\omega_p$. Also ist $c_p : I_p = (\alpha_p, \omega_p) \to M$ maximale Integralkurve. Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich aus Satz 4.3(i) und der Maximalität. Schließlich ergibt sich Behauptung (iii) aus Satz 4.3(iii) mit einem Überdeckungsargument. $\square$

**Folgerung 4.3** *Sei $c_p : (\alpha_p, \omega_p) \to M$ die maximale Integralkurve von $X \in C^1(TM)$ mit Anfangswert $c_p(0) = p$. Gilt dann $\omega_p < \infty$ (bzw. $\alpha_p > -\infty$), so gibt es zu $K \subset M$ kompakt ein $t^K < \omega_p$ (bzw. $t_K > \alpha_p$), so dass gilt:*

$$c_p(t) \notin K \text{ für alle } t > t^K \quad (\text{ bzw. } c_p(t) \notin K \text{ für alle } t < t_K).$$

*Hat $X$ kompakten Träger auf $M$, so gilt $(\alpha_p, \omega_p) = (-\infty, \infty)$.*

Beweis: Sei $\omega_p < \infty$. Dann gilt $\omega_{c_p(t)} = \omega_p - t \searrow 0$ mit $t \nearrow \omega_p$. Folgerung 4.2(iii) liefert $c_p(t) \notin K$ für $t$ hinreichend groß. Wäre $\omega_p < \infty$ im Fall $K := \operatorname{spt} X$ kompakt, so folgt $c_p(t) \notin K$ für $t > t_K$, also $c_p'(t) = X(c_p(t)) = 0$ für $t > t^K$. Aber dann ist $c_p(t)$ konstant für $t > t^K$, und wir können die Lösung konstant auf $(t^K, \infty)$ fortsetzen, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

**Definition 4.4** *Für $X \in C^1(TM)$ sei $c_p : I_p \to M$ die maximale Integralkurve mit $c_p(0) = p$, und $M^X = \{(p,t) \in M \times \mathbb{R} : t \in I_p\}$. Der Fluss von $X$ ist die Abbildung*

$$\phi : M^X \to M,\ \phi(p,t) = c_p(t).$$

*Wir setzen $M_t^X = \{p \in M : t \in I_p\}$ und $\phi_t : M_t^X \to M$, $\phi_t(p) = \phi(p,t) = c_p(t)$.*

**Lemma 4.2 (Flusseigenschaft)** *Sei $\phi$ der Fluss von $X \in C^1(TM)$. Ist $p \in M_t^X \cap M_{s+t}^X$ für $s,t \in \mathbb{R}$, so folgt $\phi_t(p) \in M_s^X$, und es gilt*

$$(\phi_s \circ \phi_t)(p) = \phi_{s+t}(p). \tag{4.5}$$

Beweis: Da $I_p$ Intervall, gilt:

$$\begin{aligned} &\text{im Fall } s > 0: \quad \sigma + t \in I_p \quad \text{für } \sigma \in [0,s] =: I,\\ &\text{im Fall } s < 0: \quad \sigma + t \in I_p \quad \text{für } \sigma \in [s,0] =: I. \end{aligned}$$

Wir berechnen für $\sigma \in I$

$$\frac{d}{d\sigma} c_p(\sigma + t) = (c_p)'(\sigma + t) = X(c_p(\sigma + t)) \quad \text{und} \quad c_p(\sigma + t)|_{\sigma = 0} = c_p(t) = \phi(p,t).$$

Es folgt $s \in I_{\phi(p,t)}$ und $(\phi_s \circ \phi_t)(p) = c_p(s+t) = \phi_{s+t}(p)$. $\square$

**Satz 4.4** *Sei $X \in C^k(TM)$. Der Fluss $\phi : M^X \to M$ hat folgende Eigenschaften:*

(i) *Die Mengen $M^X \subset M \times \mathbb{R}$ sowie $M_t^X \subset M$ sind offen.*

(ii) *$\phi : M^X \to M$ ist von der Klasse $C^k$.*

(iii) *$\phi_t : M_t^X \to M_{-t}^X$ ist ein $C^k$-Diffeomorphismus.*

Beweis: Wir bemerken vorab zu (i): aus $M^X$ offen folgt $M_t^X$ offen. Denn es gilt

$$M_t^X = \{p \in M : (p,t) \in M^X\} = i_t^{-1}(M^X) \quad \text{wobei } i_t : M \to M \times \mathbb{R},\ i_t(p) = (p,t).$$

Wir betrachten nun die Menge $G$ aller Punkte $(p,t) \in M^X$ mit folgender Eigenschaft:

*es gibt $W \subset M \times \mathbb{R}$ offen mit $(p,t) \in W \subset M^X$ und $\phi|_W \in C^k(W,M)$.*

Offenbar folgt $W \subset G$, insbesondere ist $G$ offen. Wir zeigen $G = M^X$, daraus folgen die Behauptungen (i) und (ii). Nach Satz 4.3(iii) gibt es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $U$ und ein $\delta > 0$, so dass $\phi$ auf $U \times (-\delta,\delta)$ definiert und $C^k$ ist, also ist $M \times \{0\} \subset G$. Sei nun ein Punkt $(p,T) \in M^X$ vorgegeben, ohne Einschränkung mit $T > 0$.

*Schritt 1: Es gibt $U \supset c_p([0,T])$ offen und $\delta > 0$ mit $U \times (-\delta,\delta) \subset G$.*

*Beweis.* Wie oben festgestellt gibt es zu $c_p(t)$, $t \in [0,T]$, eine Umgebung $U_t$ und ein $\delta_t > 0$ so dass $U_t \times (-\delta_t, \delta_t) \subset G$. Die kompakte Menge $c_p([0,T])$ wird durch endlich viele $U_{t_i}$, $i = 1, \ldots, N$, überdeckt. Wir setzen $U = \bigcup_{i=1}^N U_{t_i}$ und $\delta = \min_{i=1,\ldots,N} \delta_{t_i} > 0$. Es folgt

$$U \times (-\delta, \delta) \subset \bigcup_{i=1}^N U_{t_i} \times (-\delta_{t_i}, \delta_{t_i}) \subset G.$$

*Schritt 2: Setze $\tau = \sup\{t \geq 0 : \{p\} \times [0,t] \subset G\}$. Dann ist $\tau > T$ und somit $(p,T) \in G$.*
*Beweis.* Nach Schritt 1 ist $p = c_p(0) \in U$, also $\{p\} \times [0,\delta) \subset G$, folglich $\tau \geq \delta > 0$. Angenommen es ist $\tau \leq T$. Für $0 \leq t < \tau$ gilt $\{p\} \times [0,t] \subset G$, also gibt es eine offene Umgebung $V$ von $p$ mit $V \times [0,t] \subset G$, dabei kann $V$ von $t$ abhängen. Es gilt $\phi_t(p) = c_p(t) \in U$, und $\phi_t$ ist stetig in $p$. Nach Verkleinerung von $V$ können wir dann $\phi_t(V) \subset U$ annehmen. Definiere nun die Abbildung

$$\psi : V \times [t, t+\delta) \to M, \; \psi(q,s) = \phi(\phi_t(q), s-t).$$

Nach Wahl von $V$ ist $\phi_t|_V$ von der Klasse $C^k$, und $\phi$ ist $C^k$ auf $U \times (-\delta, \delta)$. Wegen $\phi_t(V) \subset U$ und $s - t \in [0, \delta)$ ist $\psi$ ebenfalls $C^k$ nach der Kettenregel. Weiter ist $\psi(q,s)$, $s \in [t, t+\delta)$, Integralkurve mit Anfangswert $\psi(q,t) = \phi_t(q)$. Damit haben wir eine Fortsetzung von $\phi$ auf $V \times [0, t+\delta)$ als $C^k$ Abbildung gefunden. Es folgt $\{p\} \times [0, t+\delta) \subset G$. Nach Definition als Supremum ist dann $\tau \geq t + \delta$, und mit $t \nearrow \tau$ folgt $\tau \geq \tau + \delta$, ein Widerspruch.

*Beweis von (iii):* Sei $p \in M_t^X$, also $t \in I_p$. Nach Lemma 4.2 gilt dann $-t \in I_{\phi_t(p)}$ bzw. $\phi_t(p) \in M_{-t}^X$, und $\phi_{-t}(\phi_t(p)) = p$. Da $t$ und $-t$ vertauscht werden können, ist $\phi_t$ bijektiv. Außerdem gilt $\phi_t = \phi \circ i_t$ auf $M_t^X$, somit ist $\phi_t$ ein $C^k$-Diffeomorphismus. □

Ist das Vektorfeld $X \in C^1(TM)$ vollständig integrierbar, das heißt alle Flusskurven sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, so liefert der Fluss die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}\,(M), \; t \mapsto \phi_t, \qquad \text{mit } \phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t};$$

das ist die von $X$ erzeugte Einparametergruppe von Diffeomorphismen von $M$.

**Lemma 4.3** *Sei $X \in T_pM$ mit $Df(p)X = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$. Dann folgt $X = 0$.*

BEWEIS: Wähle eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$. Für $i = 1, \ldots, n$ gibt es Funktionen $\widetilde{\varphi}^i \in C^\infty(M)$ mit $\widetilde{\varphi}^i = \varphi^i$ nahe bei $p$ (verwende eine Abschneidefunkion). Nach Definition der Ableitung gilt dann $D\varphi^i(p) = D\widetilde{\varphi}^i(p)$, also folgt

$$X^i = D\varphi^i(p)X = D\widetilde{\varphi}^i(p)X = 0.$$

□

Vektorfelder $X \in C^0(TM)$ operieren auf Funktionen $f \in C^1(M)$ durch Richtungsableitung. In diesem Zusammenhang ist folgende Notation üblich:

$$Xf : M \to \mathbb{R}, \; Xf(p) = Df(p)X(p).$$

**Satz 4.5 (Lieklammer)** *Seien $X, Y \in C^k(TM)$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $C^{k-1}$-Vektorfeld, die Lieklammer $[X,Y]$ von $X$ und $Y$, so dass gilt:*

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad \textit{für alle } f \in C^\infty(M). \tag{4.6}$$

*Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ hat $[X,Y]$ die Koordinatendarstellung*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\big)\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{4.7}$$

Beweis: Wir berechnen bzgl. einer lokalen Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$

$$X(Yf) = \sum_{i,j=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\big) = \sum_{i,j=1}^{n} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Nach Schwarz heben sich die zweiten Ableitungen beim Kommutator weg, es folgt

$$X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^{n} \big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\big)\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Wir definieren das Vektorfeld $[X,Y] \in C^{k-1}(TU)$ durch (4.7), auf $U$ gilt dann die gewünschte Eigenschaft (4.6). Die Definitionen bezüglich zweier Karten stimmen überein, denn das Differenzvektorfeld ist Null nach Lemma 4.3. Also erhalten wir ein global definiertes Vektorfeld $[X,Y] \in C^{k-1}(TM)$. □

**Lemma 4.4** *Für Vektorfelder $X, Y, Z \in C^k(TM)$ mit $k \geq 1$ gilt:*

(i) $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X,Y] + \mu[Y,Z]$ *für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) $[X,Y] = -[Y,X]$.

(iii) $\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0$, *falls* $k \geq 2$.

(iv) *Für die Basisfelder einer Karte ist* $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

Beweis: Die Aussagen folgen aus der Definition. Für (iii) berechnen wir mit $f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} \big[[X,Y],Z\big]f &= [X,Y]\,Zf - Z\,[X,Y]f \\ &= \underbrace{XYZf}_{\text{zyklisch}} - \underbrace{YXZf}_{\text{antizyklisch}} - \underbrace{ZXYf}_{\text{zyklisch}} + \underbrace{ZYXf}_{\text{antizyklisch}}\quad. \end{aligned}$$

Also heben sich bei zyklischer Vertauschung und Addition alle Terme weg. Behauptung (iv) folgt aus dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. □

*Bemerkung.* Die Lieklammer ist nicht bilinear über $C^\infty(M)$, sondern es gilt

$$[fX,Y] = f\,[X,Y] - (Yf)\,X \quad \text{bzw.} \quad [X,fY] = f[X,Y] + (Xf)Y. \tag{4.8}$$

**Definition 4.5** *Seien $M, N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f \in C^1(M,N)$. Das Vektorfeld $Y : N \to TN$ heißt $f$-verwandt zu dem Vektorfeld $X : M \to TM$, wenn gilt:*

$$Y \circ f = Df \cdot X \quad \Leftrightarrow \quad Y(f(p)) = Df(p)X(p) \text{ für alle } p \in M.$$

**Lemma 4.5** *Sei $f \in C^2(M,N)$. Sind $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in C^1(TN)$ $f$-verwandt zu $X, Y \in C^1(TM)$, so ist $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ auch $f$-verwandt zu $[X,Y]$.*

Beweis: In Koordinaten reduziert sich die Sache auf den Fall $f \in C^2(U,V)$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es gilt $\tilde{X}(f(p)) = Df(p)X(p)$ und $\tilde{Y}(f(p)) = Df(p)Y(p)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} D(\tilde{Y} \circ f)(p)\, X(p) &= (D\tilde{Y})(f(p))\, Df(p)\, X(p) \\ &= (D\tilde{Y})(f(p))\, \tilde{X}(f(p)) \\ &= (D\tilde{Y} \cdot \tilde{X})(f(p)). \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$D(Df \cdot Y)(p)\, X(p) = Df(p)\, DY(p)\, X(p) + D^2 f(p)(X(p), Y(p)).$$

Durch Vertauschung und Subtraktion folgt, da $D^2 f(p)$ symmetrisch ist,

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}](f(p)) &= (D\tilde{Y} \cdot \tilde{X})(f(p)) - (D\tilde{X} \cdot \tilde{Y})(f(p)) \\ &= Df(p)\big(DY(p)X(p) - DX(p)Y(p)\big) \\ &= Df(p)\, [X,Y](p). \end{aligned}$$

□

Was ist nun die geometrische Bedeutung der Lieklammer? Wir wollen zeigen, dass das Verschwinden der Lieklammer von zwei Vektorfeldern $X$,$Y$ – man spricht dann von kommutierenden Vektorfeldern – gleichbedeutend damit ist, dass die zugehörigen Flüsse der Vektorfelder kommutieren. Dazu brauchen wir etwas Vorbereitung.

**Lemma 4.6** *Seien $M$ und $N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $f \in C^1(M,N)$. Das Vektorfeld $Y : N \to TN$ sei $f$-verwandt zu $X : M \to TM$. Ist dann $c : I \to M$ Integralkurve von $X$, so ist $f \circ c : I \to N$ Integralkurve von $Y$.*

Beweis: $\frac{d}{dt} f(c(t)) = Df(c(t))c'(t) = Df(c(t))X(c(t)) = Y(f(c(t)))$. □

Zu gegebenem $X$ und $f$ muss kein $f$-verwandtes Feld $Y$ existieren, zum Beispiel kann es Punkte $p_{1,2} \in M$ geben mit $f(p_1) = f(p_2)$, aber $Df(p_1)X(p_1) \neq Df(p_2)X(p_2)$. Auch ist ein $f$-verwandtes Feld nicht eindeutig bestimmt, es sei denn, $f$ ist surjektiv. Ist $f \in C^1(M,N)$ aber ein Diffeomorphismus, so gibt es genau ein $f$-verwandtes Feld, nämlich den pushforward von $X$ unter $f$.

**Definition 4.6** *Sei $f \in C^1(M,N)$ ein Diffeomorphismus. Dann gibt es zu jedem Vektorfeld $X : M \to TM$ genau ein $f$-verwandtes Feld $Y : N \to TN$, Bezeichnung $Y = f_* X$, nämlich*

$$Y(q) = Df(p)X(p)|_{p=f^{-1}(q)}.$$

*Für $f \in C^{k+1}(M,N)$ und $X \in C^k(TM)$ ist $f_*X$ in $C^k(TN)$.*

Sind $f \in C^1(M,N)$ und $g \in C^1(N,P)$ diffeomorph, so gilt $(g \circ f)_* X = g_*(f_* X)$, denn

$$(g \circ f)_* X((g \circ f)(p) = D(g \circ f)(p)X(p) = Dg(f(p))Df(p)X(p) = g_*(f_*X)(g(f(p))). \tag{4.9}$$

**Lemma 4.7** *Sei $f \in C^2(M,N)$ ein Diffeomorphismus, $X \in C^1(TM)$ und $Y = f_* X$. Dann gilt für die zugehörigen Flüsse $N_t^Y = f(M_t^X)$ und $\psi_t \circ f = f \circ \phi_t$ auf $M_t^X$.*

Beweis: Nach Lemma 4.6 ist $f \circ \phi_t$, $t \in I_p$, Integralkurve von $Y$ mit Wert $f(p)$ bei $t = 0$. Also gilt $I_{f(p)} \supset I_p$ und $\psi_t \circ f(p) = f \circ \phi_t(p)$ für $t \in I_p$. Es folgt

$$f(M_t^X) = \{f(p) : p \in M,\, t \in I_p\} \subset N_t^Y \quad \text{und} \quad \psi_t \circ f = f \circ \phi_t \text{ auf } M_t^X.$$

Anwendung auf $f^{-1}$ liefert $f^{-1}(N_t^Y) \subset M_t^X$, also $f(M_t^X) = N_t^Y$. □

**Satz 4.6** *Seien $X, Y \in C^2(TM)$ und $\phi : M^X \to M$ der Fluss von $X$. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((\phi_{-t})_* Y\big)(p)|_{t=0} = [X, Y](p). \tag{4.10}$$

Beweis: Nach Definition 4.6 gilt mit $(\phi_{-t})^{-1} = \phi_t$

$$\big((\phi_{-t})_* Y\big)(p) = D\phi_{-t}(q) Y(q)|_{q=(\phi_{-t})^{-1}(p)} = D\phi_{-t}(\phi_t(p)) Y(\phi_t(p)) \in T_p M.$$

Wir zeigen die Formel zuerst wenn $M$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Nach Satz 4.3(iii) ist der Fluss $\phi(x,t)$ dann $C^2$ auf einer offenen Umgebung von $(p, 0)$. Wir bezeichnen mit $D$ die $x$-Ableitung, und berechnen mit üblicher Differentialrechnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\big((\phi_{-t})_* Y\big)(p)|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} D\phi(\phi_t(p), -t)\, Y(\phi_t(p)) \\
&= D^2\phi(p,0)(X(p), Y(p)) - \partial_t D\phi(p,0) Y(p) + D\phi(p,0) DY(p) X(p).
\end{aligned}$$

Nun gilt $\phi(x, 0) = x$, also $D\phi(x,0) = \mathrm{Id}$ und $D^2\phi(p,0) = 0$. Ferner ist $\partial_t \phi(x,t) = X(\phi(x,t))$, daraus folgt $\partial_t D\phi(p,0) = D\partial_t\phi(p,0) = DX(p)$. Es ergibt sich mit (4.7)

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((\phi_{-t})_* Y(p)\big)|_{t=0} = -DX(p)Y(p) + DY(p)X(p) = [X,Y](p).$$

Wir zeigen nun, dass die Behauptung unter Diffeomorphismen invariant ist. Genauer sei $f \in C^2(M, N)$ Diffeomorphismus, und $\tilde{X} = f_* X$ sowie $\tilde{Y} = f_* Y$. Bezeichnet $\psi$ den Fluss von $\tilde{X}$, so gilt $\psi_t \circ f = f \circ \phi_t$ nach Lemma 4.7, und daraus folgt mit der Kettenregel (4.9)

$$(\psi_{-t})_* \tilde{Y}(f(p)) = (\psi_{-t})_*(f_* Y)(f(p)) = f_*\big((\phi_{-t})_* X\big)(f(p)) = Df(p)\, (\phi_{-t})_* X(p).$$

Andererseits wissen wir von Lemma 4.5

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}](f(p)) = Df(p)[X,Y](p).$$

Die Invarianz von (4.10) unter Diffeomorphismen folgt. Da jede Mannigfaltigkeit lokal diffeomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, ist der Satz allgemein bewiesen. □

Die folgende Aussage gilt auch wenn die Flüsse nicht aug ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert sind, der Einfachheit halber setzen wir das aber voraus.

**Satz 4.7** *Die Vektorfelder $X, Y \in C^2(TM)$ seien vollständig integrierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $[X, Y] = 0$ *auf* $M$.

(ii) $\phi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_s$, *wobei* $\phi_s$, $\psi_t$ *die Flüsse von* $X$ *bzw.* $Y$ *sind.*

Beweis: Wir zeigen zuerst (ii) $\Rightarrow$ (i). Und zwar folgt für $p \in M$ nach Anwendung von erst $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}$, und dann $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$ mit Satz 4.6

$$(\phi_{-s} \circ \psi_t \circ \phi_s)(p) = \psi_t(p) \quad \Rightarrow \quad D\phi_{-s}(\phi_s(p))Y(\phi_s(p)) = Y(p) \quad \Rightarrow \quad [X,Y](p) = 0.$$

Umgekehrt berechnen wir für $s = s_0 + \sigma$, also $\phi_{-s} = \phi_{-s_0} \circ \phi_{-\sigma}$, wieder mit Satz 4.6

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}(\phi_{-s})_* Y(p)|_{s=s_0} &= \frac{\partial}{\partial \sigma}(\phi_{-(s_0+\sigma)})_* Y(p)|_{\sigma=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma}(\phi_{-s_0})_* \big((\phi_{-\sigma})_* Y\big)(p)|_{\sigma=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} D\phi_{-s_0}(\phi_{s_0}(p))(\phi_{-\sigma})_* Y)(\phi_{s_0}(p))|_{\sigma=0} \\
&= D\phi_{-s_0}(\phi_{s_0}(p))\,[X,Y](\phi_{s_0}(p)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also ist $(D\phi_{-s} \cdot Y)(\phi_s(p)) = Y(p)$ für alle $(p,s)$. Betrachte nun für $s \in \mathbb{R}$ fest die Kurve $c(t) := (\phi_{-s} \circ \psi_t \circ \phi_s)(p)$. Es gilt $c(0) = p$ und

$$c'(t) = (D\phi_{-s} \cdot Y)(\psi_t \circ \phi_s(p)) = (D\phi_{-s} \cdot Y)\big(\phi_s\left(\phi_{-s} \circ \psi_t \circ \phi_s)(p)\right)\big) = Y(c(t)).$$

Der Eindeutigkeitssatz, siehe Satz 4.3(i)), liefert $c(t) = \psi_t(p)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und folglich $\phi_{-s} \circ \psi_t \circ \phi_s = \psi_t$ für alle $s,t \in \mathbb{R}$. $\square$

# 5 Alternierende Multilinearformen

Im folgenden sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, wir denken an den Modellfall $V = \mathbb{R}^n$ und an $V = T_pM$, den Tangentialraum einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit im Punkt $p$. Wir bezeichnen mit $\otimes^k V$ den Vektorraum der $k$-linearen Abbildungen

$$\omega : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \text{ Faktoren}} \to \mathbb{R},\ (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_k).$$

Die Addition und Skalarmultiplikation ist punktweise gegeben, also

$$\begin{aligned}
(\omega + \eta)(v_1, \ldots, v_k) &= \omega(v_1, \ldots, v_k) + \eta(v_1, \ldots, v_k)\\
(\lambda\,\omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \lambda\,\omega(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

**Definition 5.1** *$\omega \in \otimes^k V$ heißt alternierend, falls für alle Permutationen $\sigma \in S_k$ gilt:*

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\,\omega(v_1, \ldots, v_k). \tag{5.1}$$

*Wir bezeichnen den Raum der alternierenden $k$-Formen mit $\Lambda^k V$.*

Äquivalent lassen sich alternierende Formen wie folgt charakterisieren: Transpositionen (Vertauschungen) haben Vorzeichen $-1$, also gilt

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \quad \text{für alle } 1 \leq i < j \leq k. \tag{5.2}$$

Da die Gruppe $S_k$ durch Transpositionen erzeugt wird, folgt umgekehrt (5.1). Mit $v_i = v_j$ ergibt sich nun weiter

$$\omega(v_1, \ldots, \overset{i}{v}, \ldots, \overset{j}{v}, \ldots, v_k) = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i < j \leq k. \tag{5.3}$$

Umgekehrt folgt (5.2) durch Wahl von $v = v_i + v_j$ und Ausmultiplizieren. Schließlich

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0 \quad \text{falls } v_1, \ldots, v_k \text{ linear abhängig.} \tag{5.4}$$

Denn ein $v_i$ kann als Linearkombination der anderen $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ geschrieben werden, und diese treten dann doppelt auf. Die umgekehrte Implikation ist hier trivial.

Wir haben die folgenden, schon bekannten Spezialfälle:

$$\begin{array}{ll}
\Lambda^0 V = \mathbb{R} & \text{(per Definition)},\\
\Lambda^1 V = V^* & \text{(der Dualraum)},\\
\Lambda^n V = \mathbb{R} \cdot \det & \text{(Lineare Algebra)},\\
\Lambda^k V = \{0\} \text{ für } k > n & \text{(nach (5.4))}.
\end{array}$$

**Lemma 5.1 (Alternator)** *Sei* $\mathrm{Alt} : \otimes^k V \to \otimes^k V$ *definiert durch*

$$\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma)\,\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}). \tag{5.5}$$

*Dann ist* $\mathrm{Alt}$ *eine lineare Projektion mit Bild $\Lambda^k V$.*

Beweis: Wir zeigen erst, dass Alt nach $\Lambda^k V$ abbildet. Für $\tau \in S_k$ berechnen wir, indem wir $v_{\tau(i)} =: w_i$ substituieren, also $w_{\sigma(i)} = v_{\tau\sigma(i)}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\omega)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)}) &= = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}\,(\sigma)\omega(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(k)}) \\
&= \frac{\mathrm{sign}\,(\tau)}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}\,(\tau\sigma)\omega(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(k)}) \\
&= \mathrm{sign}\,(\tau)\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass die $\tau\sigma$ die Gruppe $S_k$ genau einmal durchlaufen. Es ist klar dass Alt linear ist. Um zu sehen, dass Alt eine Projektion mit Bild $\Lambda^k V$ ist, zeigen wir nun $\mathrm{Alt}|_{\Lambda^k V} = \mathrm{Id}_{\Lambda^k V}$. Und zwar gilt für $\omega \in \Lambda^k V$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}\,(\sigma)\,\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \underbrace{\mathrm{sign}\,(\sigma)\mathrm{sign}\,(\sigma)}_{=1} \omega(v_1, \ldots, v_k) \\
&= \omega(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

□

Für allgemeine Multilinearformen haben wir das Tensorprodukt

$$\otimes^k V \times \otimes^\ell V \to \otimes^{k+\ell} V, \quad (\omega \otimes \eta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \omega(v_1, \ldots, v_k)\eta(v_{k+1}, \ldots, v_{k+\ell}).$$

Man sieht leicht, dass dieses Produkt assoziativ ist:

$$\begin{aligned}
(\omega \otimes \eta) \otimes \zeta(v_1, \ldots, v_{k+\ell+m}) &= (\omega \otimes \eta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell})\,\zeta(v_{k+\ell+1}, \ldots, v_{k+\ell+m}) \\
&= \omega(v_1, \ldots, v_k)\,\eta(v_{k+1}, \ldots, v_{k+\ell})\,\zeta(v_{k+\ell+1}, \ldots, v_{k+\ell+m}) \\
&= \omega \otimes (\eta \otimes \zeta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell+m}).
\end{aligned}$$

Wir definieren nun ein Produkt auf $\Lambda^k V$.

**Definition 5.2 (Dachprodukt)** *Das äußere Produkt (Dachprodukt) ist definiert durch*

$$\Lambda^k V \times \Lambda^\ell V \to \Lambda^{k+\ell} V,\ \omega \wedge \eta = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta). \tag{5.6}$$

*Mit anderen Worten*

$$\omega \wedge \eta(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \mathrm{sign}\,(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+\ell)}). \tag{5.7}$$

**Beispiel 5.1** Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&k = 1,\ \ell = 1 \qquad \omega \wedge \eta(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1), \\
&k = 2,\ \ell = 1 \qquad \omega \wedge \eta(v_1, v_2, v_3) = \omega(v_1, v_2)\eta(v_3) + \omega(v_3, v_1)\eta(v_2) + \omega(v_2, v_3)\eta(v_1).
\end{aligned}$$

Prüfe nach, dass $\omega \wedge \eta$ tatsächlich alternierend ist.

Nach Definition ist das Dachprodukt in beiden beiden Faktoren linear, also zum Beispiel

$$(\lambda\omega + \mu\eta) \wedge \zeta = \lambda\, \omega \wedge \zeta + \mu\, \eta \wedge \zeta.$$

**Satz 5.1 (Eigenschaften des Dachprodukts)** *Für alternierende Formen $\omega \in \Lambda^k V$, $\eta \in \Lambda^\ell V$, $\zeta \in \Lambda^m V$ gelten folgende Rechenregeln:*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega \quad \textit{Kommutativgesetz (graduiert)}, \tag{5.8}$$

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta) \quad \textit{Assoziativgesetz} \tag{5.9}$$

Beweis: Um (5.8) zu zeigen, betrachten wir die Permutation

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & k+\ell \\ \ell+1 & \dots & \ell+k & 1 & \dots & \ell \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} (\eta \wedge \omega)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma) \eta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(\ell)})\, \omega(v_{\sigma(\ell+1)}, \dots, v_{\sigma(\ell+k)}) \\ &= \frac{\operatorname{sign}(\tau)}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma\tau) \eta(v_{\sigma\tau(k+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k+\ell)})\, \omega(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)}) \\ &= (-1)^{kl} \omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{k+\ell}). \end{aligned}$$

Die Assoziativität ist etwas schwieriger. Sei $I(k, k+\ell)$ die Menge der aufsteigenden Multiindizes $\alpha : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k+\ell\}$. Wir bezeichnen mit $\hat{\alpha} \in I(\ell, k+\ell)$ den dazu komplementären Multiindex, ebenfalls aufsteigend. Jede Permutation $\varrho \in S_{k+\ell}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$\varrho = (\alpha \circ \sigma, \hat{\alpha} \circ \tau) \quad \text{mit } \alpha \in I(k, k+\ell),\ \sigma \in S_k,\ \tau \in S_\ell,$$

und es gilt $\operatorname{sign}(\varrho) = \operatorname{sign}(\alpha, \hat{\alpha}) \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\tau)$. Berechne nun für $\gamma \in \otimes^k V$ und $\zeta \in \otimes^\ell V$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Alt}(\gamma \otimes \zeta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) \\ = {} & \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\alpha \in I(k,k+\ell)} \operatorname{sign}(\alpha, \hat{\alpha}) \cdot \\ & \sum_{\sigma \in S_k,\, \tau \in S_\ell} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\tau)\, \gamma(v_{\alpha(\sigma(1))}, \dots, v_{\alpha(\sigma(k))})\, \zeta(v_{\hat{\alpha}(\tau(1))}, \dots, v_{\hat{\alpha}(\tau(\ell))}) \\ = {} & \frac{k!\ell!}{(k+\ell)!} \sum_{\alpha \in I(k,k+\ell)} \operatorname{sign}(\alpha, \hat{\alpha}) \operatorname{Alt}(\gamma)(v_{\alpha(1)}, \dots, v_{\alpha(k)})\, \operatorname{Alt}(\zeta)(v_{\hat{\alpha}(1)}, \dots, v_{\hat{\alpha}(\ell)}). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt substituiere $v_{\alpha(i)} =: w_i$, also $v_{\alpha(\sigma(i))} = w_{\sigma(i)}$. Die Rechnung zeigt

$$\operatorname{Alt}(\gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Alt}(\gamma \otimes \zeta) = 0.$$

Diese Aussage brauchen wir: da Alt = Id auf alternierenden Formen, gilt $\operatorname{Alt}(\gamma) = 0$ für die $(k+\ell)$-lineare Form $\gamma = \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Alt}\big((\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta) \otimes \zeta\big) \\ &= \operatorname{Alt}\big(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \zeta\big) - \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \zeta) \\ &= \frac{k!\ell!m!}{(k+\ell+m)!} (\omega \wedge \eta) \wedge \zeta - \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \zeta). \end{aligned}$$

Bei anderer Klammerung folgt die analoge Formel, das Assoziativgesetzt ist gezeigt. $\square$

Aus dem Beweis ergibt sich für das Dachprodukt von $\gamma \in \Lambda^k V$ und $\zeta \in \Lambda^\ell V$ die Formel

$$\gamma \wedge \zeta(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \sum_{\alpha \in I(k,k+\ell)} \operatorname{sign}(\alpha, \hat{\alpha}) \gamma\big(v_{\alpha(1)}, \ldots, v_{\alpha(k)}\big) \zeta\big(v_{\hat{\alpha}(1)}, \ldots, v_{\hat{\alpha}(\ell)}\big). \tag{5.10}$$

Die Zahl der Summanden in (5.7) ist $(k+\ell)!$, dagegen sind es hier nur $(k+\ell)!/k!\ell!$.

**Satz 5.2 (Dachprodukte von 1-Formen)** *Für $\omega^1, \ldots, \omega^k \in \Lambda^1 V = V^*$ gilt:*

$$(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det\big(\omega^i(v_j)\big). \tag{5.11}$$

$$\omega^1, \ldots, \omega^k \text{ linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k \neq 0. \tag{5.12}$$

Beweis: Wir zeigen (5.11) durch Induktion über $k$, der Fall $k = 1$ ist klar. Für $j \in I(1,n) = \{1, \ldots, n\}$ ist $\hat{j} = (1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k)$ der komplementäre Index, und nach (5.10) gilt

$$\begin{aligned}
\omega^1 \wedge (\omega^2 \ldots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) &= \sum_{j=1}^k \operatorname{sign}(j, \hat{j})\, \omega^1(v_j) \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^k(v_1, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_k) \\
\text{(Induktion)} &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \omega^1(v_j) \det\big(\omega^i(v_\ell)\big)_{2 \le i \le k,\, \ell \neq j} \\
&= \det(\omega^i(v_j)).
\end{aligned}$$

Die $\omega^1(v_j)$ sind die Einträge der ersten Zeile, diese werden mit den Determinanten multipliziert, die sich durch Streichen der ersten Zeile und $j$-ten Spalte ergeben. Der letzte Schritt gilt also nach dem Laplace-Entwicklungssatz.

Jetzt zu (5.12). Sind $\omega^1, \ldots, \omega^k$ linear abhängig, so sind auch die Zeilen der Matrix $\big(\omega^i(v_j)\big) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ linear abhängig, also ist $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k = 0$ nach (5.11). Seien nun $\omega^1, \ldots, \omega^k$ linear unabhängig, wir zeigen $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k \neq 0$. Durch Ergänzung zu einer Basis können wir $k = n$ annehmen. Sei $\phi_1, \ldots, \phi_n$ die duale Basis in $V^{**}$, also $\phi_j(\omega^i) = \delta^i_j$. Die kanonische Abbildung $J : V \to V^{**}$ ist surjektiv, also gibt es $v_j \in V$ mit $Jv_j = \phi_j$, das heißt

$$\omega^i(v_j) = Jv_j(\omega^i) = \phi_j(\omega^i) = \delta^i_j \quad \Rightarrow \quad \det(\omega^i(v_j)) = 1.$$

Mit (5.11) folgt $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k \neq 0$. $\square$

**Satz 5.3 (Basis von $\Lambda^k V$)** *Sei $e_1, \ldots, e_n$ Basis von $V$ mit dualer Basis $e^1, \ldots, e^n \in V^*$. Dann hat $\Lambda^k V$ die Basis $e^I = e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$ mit $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$. Insbesondere gilt $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$, und jedes $\omega \in \Lambda^k V$ hat die Darstellung*

$$\omega = \sum_{I \in I(k,n)} \omega_I\, e^I \qquad \text{mit } \omega_I = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}). \tag{5.13}$$

Beweis: Betrachte für aufsteigende Multiindizes $I, J \in I(k,n)$ die Matrix $\big(e^{i_\ell}(e_{j_m})\big) \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Ist $I = J$, also $i_r = j_r$ für $r = 1, \ldots, k$, so ist $e^{i_\ell}(e_{j_m}) = \delta_{\ell m}$. Andernfalls sei $r \in \{1, \ldots, k\}$

der kleinste Index mit $i_r \neq j_r$. Im Fall $i_r > j_r$ ist $j_r \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, also ist die $r$-te Spalte der Matrix Null. Im Fall $i_r < j_r$ ist $i_r \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$ und die $r$-te Zeile ist Null. Damit gilt

$$e^I(e_J) = \det\big(e^{i_\ell}(e_{j_m})\big)_{1 \leq \ell, m \leq k} = \delta^I_J. \tag{5.14}$$

Für $\omega \in \Lambda^k V$ behaupten wir nun

$$\omega = \sum_{I \in I(k,n)} \omega_I e^I \quad \text{ mit } \omega_I = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).$$

Da beide Seiten multilinear und alternierend sind, müssen wir das nur auf $e_J = (e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$, $J \in I(k,n)$, nachprüfen, dann folgt es aber direkt aus (5.14). Ist andererseits $\omega = \sum_{I \in I(k,n)} c_I e^I = 0$ mit beliebigen $c_I \in \mathbb{R}$, so folgt $c_J = \omega(e_J) = 0$ für alle $J \in I(k,n)$. $\square$

**Definition 5.3 (Pullback)** *Seien $V, W$ Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $A \in L(V,W)$.*

(a) *Die transponierte (oder duale) Abbildung zu $A$ ist*

$$A^* \in L(W^*, V^*),\ A^*\psi(v) = \psi(Av).$$

(b) *Der Pullback von $k$-Formen $\omega$ unter $A$ ist*

$$A^* \in L(\Lambda^k W, \Lambda^k V),\ A^*\omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(Av_1, \ldots, Av_k).$$

Seien $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$ Basen von $V$ und $W$, und $w^1, \ldots, w^m \in W^*$ die duale Basis. Für $A \in L(V,W)$ sei $A^i_j = w^i(Av_j)$ . Für Multiindizes $I \in I(k,m)$ und $J \in I(k,n)$ folgt dann

$$A^*w^I(v_J) = w^I(Av_{j_1}, \ldots, Av_{j_k}) = \det\big(w^{i_\ell}(Av_{j_m})\big) = \det\big(A^{i_\ell}_{j_m}\big).$$

Das ist die Determinante der $k \times k$ Submatrix von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, die sich durch Auswahl der Zeilen $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$ und der Spalten $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ ergibt. Diese Subdeterminante wird auch als $I \times J$-Minor der Matrix $A$ bezeichnet.

**Lemma 5.2** *Für den Pullback gelten folgende Rechenregeln:*

(i) *Sei $A \in L(V,W)$. Dann gilt für $\omega, \eta \in \Lambda^k W$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$$A^*(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda\, A^*\omega + \mu\, A^*\eta.$$

(ii) *Sei $A \in L(V,W)$. Dann gilt für $\omega \in \Lambda^k W$ und $\eta \in \Lambda^\ell W$*

$$A^*(\omega \wedge \eta) = (A^*\omega) \wedge (A^*\eta).$$

(iii) *Sei $A \in L(V,W)$ und $B \in L(W,Z)$. Dann gilt $(BA)^* = A^*B^*$.*

Beweis: Regel (i) ist klar. Für (ii) berechnen wir mit der Definition des Dachprodukts

$$\begin{aligned} A^*(\omega\wedge\eta)(v_1,\ldots,v_{k+\ell}) &= (\omega\wedge\eta)(Av_1,\ldots,Av_{k+\ell}) \\ &= \frac{1}{k!\,\ell!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma)\,\omega(Av_{\sigma(1)},\ldots,Av_{\sigma(k)})\,\eta(Av_{\sigma(k+1)},\ldots,Av_{\sigma(k+\ell)}) \\ &= \frac{1}{k!\,\ell!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma)\,A^*\omega(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})\,A^*\eta(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+\ell)}) \\ &= (A^*\omega)\wedge(A^*\eta)(v_1,\ldots,v_{k+\ell}). \end{aligned}$$

Wir zeigen schließlich (iii),und zwar gilt für $\zeta\in\Lambda^k Z$

$$(BA)^*\zeta(v_1,\ldots,v_k) = \zeta(BAv_1,\ldots,BAv_k) = B^*\zeta(Av_1,\ldots,Av_k) = A^*(B^*\zeta)(v_1,\ldots,v_k).$$

□

# 6 Differentialformen

**Definition 6.1 (Bündel $\Lambda^k TM$)** *Sei $M$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für $k = 0, 1, \ldots, n$ setzen wir*

$$\Lambda^k TM = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k T_p M$$

$\Lambda^k TM$ ist ein Vektorbündel vom Rang $\binom{n}{k}$. Wir haben wieder die Bündelprojektion

$$\pi : \Lambda^k TM \to M,\ \pi(\omega) = p \quad \text{für } \omega \in \Lambda^k T_p M.$$

Die Faser $\pi^{-1}\{p\} = \Lambda^k T_p M$ ist ein Vektorraum der Dimension $\binom{n}{k}$ nach Satz 5.3 . Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$ hat $\omega \in \Lambda^k T_p M$ die Koordinaten

$$\omega_I := \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}(p)\Big) \quad \text{mit } I = (i_1, \ldots, i_k) \in I(k, n).$$

Damit ergeben sich die Bündelkarten, mit $N = \binom{n}{k}$,

$$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^N,\ \phi(\omega) = \big(p\,,\ (\omega_I)_{I \in I(k,n)}\big)$$

Eine Menge $\Omega \subset \Lambda^k TM$ ist genau dann offen, wenn $\phi(\Omega \cap \pi^{-1}(U))$ offen in $U \times \mathbb{R}^N$ ist für alle Karten im maximalem Atlas $\mathcal{A}$. Eine Folge $\omega^\nu \in \Lambda^k TM$ konvergiert genau dann gegen $\omega \in \Lambda^k TM$, wenn Folgendes gilt:

- Für die Fußpunkte $p^\nu = \pi(\omega^\nu)$ und $p = \pi(\omega)$ gilt $p^\nu \to p$.
- Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte mit $p \in U$. Dann gilt $\omega_I^\nu \to \omega_I$ für alle $I \in I(k, n)$.

**Definition 6.2 (Differentialform)** *Einen Schnitt $\omega : M \to \Lambda^k TM$, also $\omega(p) \in \Lambda^k T_p M$ für alle $p$, bezeichnet man als alternierende Differentialform vom Grad $k$ auf $M$ (kurze Bezeichnung: $k$-Form).*

Wir haben folgende Spezialfälle:

$k = 0$: Nach Definition ist $\Lambda^0 T_p M = \mathbb{R}$. Die Formen vom Grad $k = 0$ sind damit die Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$.

$k = 1$: $\Lambda^1 T_p M$ ist identisch mit dem Dualraum $(T_p M)^*$. Eine 1-Form ist damit ein Schnitt im Kotangentialbündel

$$T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M \quad \text{wobei } T_p^* M := (T_p M)^*.$$

Ein Beispiel ist das Differential $df$ einer Funktion $f \in C^1(M)$. Für jedes $p \in M$ ist $df(p) : T_p M \to \mathbb{R}$ eine Linearform *. Die Differentiale der Koordinatenfunktionen einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$, $\varphi(p) = x$, werden mit $dx^i$ bezeichnet:

$$dx^i : U \to T^* U \subset T^* M,\ dx^i(p)v := d\varphi^i(p)v = \big(D\varphi(p)v\big)^i. \tag{6.1}$$

*die Notation $df$ statt $Df$ ist üblich

Die $dx^i(p)$ bilden die duale Basis zu den Kooordinatenfeldern $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$, denn

$$dx^i(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \big(\underbrace{D\varphi(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p)}_{=e_j}\big)^i = \delta^i_j.$$

Somit hat jede 1-Form $\omega : M \to T^*M$ auf $U$ die Darstellung

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \, dx^i \quad \text{ mit } \omega_i = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) : U \to \mathbb{R}.$$

Für $1 \leq k \leq n$ erhalten wir die Basisformen, wieder bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$,

$$dx^I : U \to \Lambda^k(TU) \subset \Lambda^k(TM),\ dx^I = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Jede $k$-Form $\omega$ hat auf $U$ die Darstellung

$$\omega = \sum_{I \in I(k,n)} \omega_I \, dx^I \quad \text{ mit } \omega_I = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big).$$

Es gilt $\omega \in C^r(\Lambda^k TM)$ genau wenn $\omega_I \in C^r(U)$ ist, für alle Karten $\varphi$ und alle $i \in I(k,n)$.

**Definition 6.3 (Pullback von Differentialformen)** *Sei $f \in C^1(M,N)$. Der Pullback der $k$-Form $\eta$ auf $N$ ist die $k$-Form $f^*\eta(p) = Df(p)^*\eta(f(p))$ auf $M$, bzw.*

$$f^*\eta(p)(v_1, \ldots, v_k) = \eta(f(p))(Df(p)v_1, \ldots, Df(p)v_k).$$

Die folgenden Regeln ergeben sich aus Lemma 5.2, sowie der Kettenregel für (c).

**Lemma 6.1** *Für den Pullback von Differentialformen gelten folgende Rechenregeln, wobei jeweils $f \in C^1(M,N)$ ist:*

(a) $f^*(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda f^*\omega + \mu f^*\eta \quad$ *($\omega, \eta$ $k$-Formen auf $N$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).*

(b) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta \quad$ *($\omega, \eta$ eine $k$-Form bzw. $\ell$-Form auf $N$).*

(c) $(g \circ f)^*\zeta = f^*(g^*\zeta) \quad$ *($g \in C^1(N,P)$ und $\zeta$ $k$-Form auf $P$).*

Nach Definition des Pullback und der Kettenregel erhalten wir

(6.2) $$f^*dv = (dv) \circ f Df = d(v \circ f) \quad \text{ für } f \in C^1(M,N),\ v \in C^1(N).$$

Wir wollen nun eine Koordinatendarstellung des Pullback herleiten. Sei $f \in C^1(M,N)$, und seien $x = \varphi(p)$ sowie $y = \psi(q)$ lokale Koordinaten auf $U \subset M$ bzw. $V \subset N$, mit $f(U) \subset V$. Sei $\eta = \sum_{J \in I(k,n)} \eta_J dy^J$ eine $k$-Form auf $V$. Aus (6.2) folgt

(6.3) $$f^*dy^j = df^j \text{ mit } f^j = \psi^j \circ f \quad \text{ bezüglich der Koordinaten } y = \psi(q).$$

Mit den Aussagen (a) und (b) von Lemma 6.1 folgt dann

(6.4) $$f^*\eta = \sum_{J \in I(k,n)} f^*(\eta_J \, dy^J) = \sum_{J \in I(k,n)} \eta_J \circ f \, df^J,$$

Dabei ist $df^J = df^{j_1} \wedge \ldots \wedge df^{j_k}$ ein Produkt von 1-Formen. Wenden wir das auf die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^I}$ mit $I = (i_1, \ldots, i_k) \in I(k,m)$ an, so folgt mit Satz 5.2 die lokale Darstellung

$$f^*\eta = \sum_{I \in I(k,m)} \sum_{J \in I(k,n)} \eta_J \circ f \,\det\Big(\frac{\partial f^J}{\partial x^I}\Big)\, dx^I. \tag{6.5}$$

Eine Bemerkung zur Notation. Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte einer Mannigfaltigkeit $M$, mit den zugehörigen Koordinatendifferentialen $dx^i = d\varphi^i$ auf $U$. Auf $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ haben wir andererseits die Standardkarte $\mathrm{id}_{\varphi(U)}$, mit den Koordinaten $x^i : \varphi(U) \to \mathbb{R}$. Die zugehörigen Differentiale $dx^i$ sind konstant, es gilt $dx^i(x)e_j = \delta^i_j$ für $x \in \varphi(U)$. Mit $dx^i$ werden also zwei verschiedene Objekte bezeichnet. Nach (6.2) gilt aber $\varphi^* dx^i = d\varphi^i$, das heißt die Notation ist zumindest konsistent. Allgemeiner folgt mit Lemma 6.1(b), (c) für eine Form $\omega$ mit Koordinatendarstellung $\omega = \sum_{I \in I(k,n)} \omega_I dx^I$ auf $U$,

$$(\varphi^{-1})^*\omega = \sum_{I \in I(k,n)} (\omega_I \circ \varphi^{-1})\, dx^I \quad \text{auf } \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n. \tag{6.6}$$

Rechts sind hier die Standarddifferentiale auf $\mathbb{R}^n$ gemeint.

Jetzt kommen wir zu der äußeren Ableitung, die von Élie Cartan 1899 eingeführt wurde. Wir definieren diese erst im $\mathbb{R}^n$. Die Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten mittels Karten ist dann straightforward.

**Lemma 6.2** *Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k = 0, \ldots, n-1$ definieren wir die äußere Ableitung*

$$d : C^1(U, \Lambda^k\mathbb{R}^n) \to C^0(U, \Lambda^{k+1}\mathbb{R}^n),\ d\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^i}. \tag{6.7}$$

*Für $k = n$ setzen wir $d = 0$. Der lineare Operator $d$ hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Im Fall $k = 0$, also für $f \in C^1(U)$, ist $df$ das Differential. Für $k$ beliebig gilt*

$$d\omega = \sum_{I \in I(k,n)} d\omega_I \wedge dx^I \quad \text{für } \omega = \sum_{I \in I(k,n)} \omega_I\, dx^I.$$

(b) *$d^2 = 0$, genauer:* $\quad d(d\omega) = 0$ *für $\omega \in C^2(U, \Lambda^k\mathbb{R}^n)$.*

(c) *Produktregel: Für $\omega \in C^1(U, \Lambda^k\mathbb{R}^n)$ und $\eta \in C^1(U, \Lambda^\ell\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(d) *Pullback: Ist $f \in C^2(U, V)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, so gilt*

$$d(f^*\eta) = f^*(d\eta) \quad \text{für } \eta \in C^1(V, \Lambda^k\mathbb{R}^m).$$

Beweis: Wir bemerken vorab, dass Formen $\omega$ hier vektorwertige Funktionen sind, die partielle Ableitung in (6.7) ist wie üblich definiert und die Basisformen $dx^I$ sind konstant.

*Beweis von (a):* Nach Definition ist

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \sum_{I\in I(k,n)} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i}\, dx^I = \sum_{I\in I(k,n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I = \sum_{I\in I(k,n)} d\omega_I \wedge dx^I.$$

*Beweis von (b):* Da $dx^i \wedge dx^j$ antisymmetrisch in $i, j$, folgt mit dem Satz von Schwarz

$$d(d\omega) = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^j}\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} dx^i \wedge dx^j \wedge \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j} = 0.$$

*Beweis von (c):* Wir berechnen

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \Big(\frac{\partial \omega}{\partial x^i} \wedge \eta + \omega \wedge \frac{\partial \eta}{\partial x^i}\Big) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^i}\Big) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \Big(\sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \frac{\partial \eta}{\partial x^i}\Big) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

*Beweis von (d):* Für $\eta = \sum_{J\in I(k,n)} \eta_J \, dy^J$ berechnen wir mit (6.4)

$$\begin{aligned} d(f^*\eta) &= d\Big(\sum_{J\in I(,n)} \eta_J \circ f \, df^{j_1} \wedge \ldots \wedge df^{j_k}\Big) \\ &= \sum_{J\in I(k,n)} d(\eta_J \circ f) \wedge df^{j_1} \wedge \ldots \wedge df^{j_k} \qquad \text{(Regeln (c) und (b))} \\ &= \sum_{J\in I(k,n)} f^*(d\eta_J) \wedge f^*(dy^{j_1}) \wedge \ldots \wedge f^*(dy^{j_k}) \qquad \text{(Kettenregel)} \\ &= f^*(d\eta) \qquad \text{(mit Lemma 6.1(b), sowie Formel (a)).} \end{aligned}$$

□

Offensichtlich ist der Operator $d$ durch die Eigenschaften (b) und (c) eindeutig bestimmt, wenn er auf Funktionen das Differential sein soll. Wir wollen als Anwendung kurz die Vektoranalysis im $\mathbb{R}^n$ mittels Differentialformen formulieren. Dazu führen wir folgende Notation ein (lies: $v$ *eingesetzt in* $\omega$):

(6.8) $\qquad (v \llcorner \omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \ldots . v_{k-1}) \quad$ für $\omega \in \Lambda^k V$ und $v, v_1, \ldots, v_k \in V$.

Sei $U$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit Karte $\mathrm{id}_U$. Für ein Vektorfeld $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} X \llcorner (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) &= \sum_{j=1}^{n} X^j e_j \llcorner (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} X^j dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Es folgt für die äußere Ableitung

$$\begin{aligned} d\big(X\llcorner(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)\big) &= \sum_{i=1}^n dx^i\wedge\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\,dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\ldots\wedge dx^n\\ &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial X^i}{\partial x^i}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n\\ &= \operatorname{div}X\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n. \end{aligned}$$

Im Fall $n=3$ setze $\xi=\sum_{j=1}^3\xi_j dx^j$ mit $\xi_j=X^j$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} d\xi &= \sum_{i=1}^3 dx^i\wedge\sum_{j=1}^3\frac{\partial\xi_j}{\partial x^i}\,dx^j\\ &= \Big(\frac{\partial\xi_3}{\partial x^2}-\frac{\partial\xi_2}{\partial x^3}\Big)\,dx^2\wedge dx^3+\Big(\frac{\partial\xi_1}{\partial x^3}-\frac{\partial\xi_3}{\partial x^1}\Big)\,dx^3\wedge dx^1+\Big(\frac{\partial\xi_2}{\partial x^1}-\frac{\partial\xi_1}{\partial x^2}\Big)\,dx^1\wedge dx^2\\ &= \operatorname{rot}X\llcorner(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3). \end{aligned}$$

Insbesondere haben wir die Regeln

$$\begin{aligned} 0 &= d(df)=\operatorname{rot}\operatorname{grad}f\llcorner dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3,\\ 0 &= d(d\xi)=\operatorname{div}\operatorname{rot}X\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3. \end{aligned}$$

Jetzt übertragen wir die Definition der äußeren Ableitung auf Mannigfaltigkeiten.

**Satz 6.1 (äußere Ableitung)** *Sei $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,* $\dim M=n$. *Wir definieren $d:C^1(\Lambda^kTM)\to C^0(\Lambda^{k+1}TM)$, für $k=0,1,\ldots,n$, durch*

(6.9) $$d\omega=\varphi^*d(\varphi^{-1})^*\omega \text{ auf } U, \text{ wobei } \varphi:U\to\varphi(U) \text{ Karte von } M.$$

*Dann ist $d\omega$ wohldefiniert, also unabhängig von der Karte, und es gilt:*

(a) *Für $f\in C^1(M)$ ist $df$ das Differential, und für $\omega=\sum_{I\in I(k,n)}\omega_I\,dx^I$ ist*

$$d\omega=\sum_{i=1}^n dx^i\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^i}=\sum_{I\in I(k,n)}d\omega_I\wedge dx^I,\qquad\text{wobei }\frac{\partial\omega}{\partial x^i}:=\sum_{I\in I(k,n)}\frac{\partial\omega_I}{\partial x^i}\,dx^I.$$

(b) $d(d\omega)=0$ *für* $\omega\in C^2(\Lambda^kTM)$.

(c) *Produktregel:* $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge d\eta$, *wenn $\omega$ eine $k$-Form ist.*

(d) *Pullback:* $d(f^*\eta)=f^*(d\eta)$ *für $f\in C^2(M,N)$ und $\eta\in C^1(\Lambda^kTN)$.*

Beweis: Wir bemerken als erstes, dass (6.9) mit der Definition im $\mathbb{R}^n$ konsistent ist: sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und $\varphi:U\to\varphi(U)$ Diffeomorphismus. Dann gilt nach Lemma 6.2(d)

$$\varphi^*d(\varphi^{-1})^*\omega=\varphi^*(\varphi^{-1})^*d\omega=d\omega.$$

Daraus folgt die Wohldefiniertheit: ist $\psi:V\to\psi(V)$ weitere Karte von $M$, so ist auf $U\cap V$

$$\psi^*d(\psi^{-1})^*\omega=\varphi^*(\psi\circ\varphi^{-1})^*d(\varphi\circ\psi^{-1})^*(\varphi^{-1})^*\omega=\varphi^*d(\varphi^{-1})^*\omega.$$

Sei nun $\omega = \sum_{I \in I(k,n)} \omega_I dx^I$ Darstellung bezüglich der Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$. Wir berechnen mit (6.6), Lemma 6.2(a), Lemma 6.1(b) und (6.2)

$$\begin{aligned} \varphi^* d(\varphi^{-1})^* \omega &= \varphi^* d \sum_{I \in I(k,n)} \omega_I \circ \varphi^{-1} \, dx^I \\ &= \varphi^* \sum_{I \in I(k,n)} d(\omega_I \circ \varphi^{-1}) \wedge dx^I \\ &= \sum_{I \in I(k,n)} d\omega_I \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Die zweite Darstellung in (a) ergibt sich durch Umformung wie in Lemma 6.2(a). Die Eigenschaften (b) und (c) folgen nun direkt aus Lemma 6.2 (b) und (c), und zwar ist

$$d(d\omega) = \varphi^* d(\varphi^{-1})^* \varphi^* d(\varphi^{-1})^* \omega = \varphi^* d^2 (\varphi^{-1})^* \omega = 0,$$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \varphi^* d(\varphi^{-1})^* (\omega \wedge \eta) \\ &= \varphi^* d\big((\varphi^{-1})^* \omega \wedge (\varphi^{-1})^* \eta\big) \\ &= \varphi^* \big(d(\varphi^{-1})^* \omega \wedge (\varphi^{-1})^* \eta + (-1)^k (\varphi^{-1})^* \omega \wedge d(\varphi^{-1})^* \eta\big) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Auch der Nachweis von (d) ist einfach: seien $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ Karten von $M$ bzw. $N$ mit $f(U) \subset V$. Dann gilt mit Lemma 6.2(d)

$$\begin{aligned} d(f^* \eta) &= \varphi^* d(\varphi^{-1})^* f^* \eta \\ &= \varphi^* d\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^* (\psi^{-1})^* \eta\big) \\ &= \varphi^* (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^* d(\psi^{-1})^* \eta \\ &= f^* d\eta. \end{aligned}$$

□

**Definition 6.4 (de-Rham-Kohomologie)** *Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist der $k$-te de-Rham-Kohomologieraum*[†] *der Quotientenvektorraum*

$$H^k_{DR}(M) = Z^k(M)/B^k(M),$$

*wobei $Z^k(M)$ der Kern von $d$ und $B^k(M)$ das Bild von $d$ ist, genauer*

$$\begin{aligned} Z^k(M) &= \{\omega \in C^\infty(\Lambda^k TM) : d\omega = 0\}, \\ B^k(M) &= \{d\eta : \eta \in C^\infty(\Lambda^{k-1} TM)\}. \end{aligned}$$

*Beachte, dass $B^k(M)$ ein Untervektorraum von $Z^k(M)$ ist wegen $d(d\eta) = 0$.*

Man kann die Definition der Kohomologie durch das Problem motivieren, ob eine gegebene Form $\omega \in C^\infty(\Lambda^k TM)$ eine Stammform $\eta \in C^\infty(\Lambda^{k-1} TM)$ hat, also $d\eta = \omega$. Wegen $d(d\eta) = 0$ ist dazu die Bedingung $d\omega = 0$ offensichtlich notwendig. Wir werden unten zeigen, dass diese

[†]Georges de Rham, Sur l'analysis situs des varietés á $n$ dimensions, Dissertation Paris 1931

Bedingung lokal auch hinreichend ist (Lemma von Poincaré). Aber global gibt es eventuell zusätzliche Bedingungen, die mit der Topologie von $M$ zu tun haben. Diese werden durch die Kohomologie beschrieben. Eine solche Situation ist schon aus der Theorie der Kurvenintegrale oder der komplexen Funktionentheorie bekannt. Übrigens nennt man $\omega$ geschlossen wenn $d\omega = 0$ bzw. $\omega \in Z^k(M)$, und exakt, wenn es eine $(k-1)$-Form $\eta$ gibt mit $\omega = d\eta$, also $\omega \in B^k(M)$. Das folgende Lemma zeigt, die Kohomologie von $M$ ist eine Diffeomorphieinvariante. Nach dem Satz von de Rham hängt $H^k_{DR}(M)$ tatsächlich nicht von der differenzierbaren Struktur ab, der Raum stimmt mit der singulären Kohomologie von $M$ überein.

**Lemma 6.3** *Eine Abbildung $f \in C^\infty(M, N)$ induziert die lineare Abbildung*

$$f^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M),\ f^*[\omega] = [f^*\omega].$$

*Ist $g \in C^\infty(N, P)$ so gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Für einen Diffeomorphimus $f \in C^\infty(M, N)$ ist $f^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M)$ ein Isomorphismus.*

Beweis: Es gilt $f^* d\eta = df^*\eta$, also $[f^* d\eta] = 0$ in $H^k_{DR}(M)$. Somit ist $f^*$ wohldefiniert und linear. Weiter gilt

$$(g \circ f)^*[\zeta] = [(g \circ f)^*\zeta] = [(g \circ f)^*\zeta] = [f^*(g^*\zeta)] = f^*(g^*[\zeta]).$$

Ist $f$ Diffeomorphismus und $g = f^{-1}$, so folgt

$$\mathrm{id}_{H^k_{DR}(M)} = (f \circ g)^* = g^* \circ f^* \quad \text{und analog} \quad \mathrm{id}_{H^k_{DR}(N)} = f^* \circ g^*.$$

□

Wir werden später zeigen, dass $H^k_{DR}(M)$ endlichdimensional ist für kompakte Mannigfaltigkeiten $M$. Damit das Problem der Stammform lösbar ist, kommen also zur Gleichung $d\omega = 0$ nur endlich viele Bedingungen hinzu. Die Zahlen $b_k(M) = \dim H^k_{DR}(M)$ heißen Bettizahlen. [‡]. Der Satz von de Rham besagt, dass die Bettizahlen Homeomorphieinvarianten sind. Die Euler-Poincaré-Charakteristik ist die Wechselsumme

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, b_k(M).$$

**Beispiel 6.1** Der Fall $k = 0$: es gilt $B^0(M) = \{0\}$ per Definition, also ist $H^0_{DR}(M) = Z^0(M)$ der Raum der lokal konstanten Funktionen. Sei $C(M)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von $M$, und

$$\phi : H^0_{DR}(M) \to \mathrm{Abb}(C(M), \mathbb{R}), \quad \phi(f)(M_p) = f(p).$$

Dabei bezeichnet $M_p$ die Komponente von $p$. Die Abbildung ist wohldefiniert da $f$ auf der Komponente konstant ist. Ist $\phi(f) = 0$, so ist $f$ auf jeder Komponente gleich Null und damit die Nullfunktion. Zu gegebener Abbildung $\varphi : C(M) \to \mathbb{R}$ könen wir $f$ lokal konstant wählen mit $f|_{M'} = \varphi(M')$ für jede Komponente $M'$. Damit ist $\phi$ ein Isomorphismus. Ist $\#C(M) = \ell \in \mathbb{N}$, so ist $H^0_{DR}(M)$ isomorph zu $\mathbb{R}^\ell$, also $b_0(M) = \ell$.

[‡] Enrico Betti, Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, Annali di Matematica 1870

**Beispiel 6.2** Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Es gilt dann $Z^1(I) = C^\infty(I, \Lambda^1\mathbb{R})$, und jede solche Form $\gamma$ hat die Darstellung $\gamma(x) = g(x)\,dx$ mit $g \in C^\infty(I)$. Die (glatten) Nullformen sind die Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, und $df(x) = f'(x)\,dx$. Es folgt $Z^1(I) = B^1(I)$ und $H^1_{DR}(I) = \{0\}$, denn für $x_0 \in I$ beliebig gilt

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g(x), \text{ also } df = \gamma.$$

**Beispiel 6.3** Sei $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$. Definiere mit dem Kurvenintegral längs $c$ die Abbildung

$$\phi : H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) \to \mathbb{R},\ \phi[\omega] = \frac{1}{2\pi}\int_c \omega.$$

Dann ist $\phi$ ein Isomorphismus (Übungsaufgabe).

Wir wollen nun sehen, wie sich die Kohomologie unter Homotopien verhält. Betrachte dazu $[0,1] \times M$, für eine gegebene $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M$. Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte von $M$, so haben wir die induzierte Karte

$$\overline{\varphi} : [0,1] \times U \to [0,1] \times \varphi(U), \overline{\varphi}(t,p) = (t, \varphi(p)).$$

Bezeichnen wir die $t$-Koordinate mit dem Index $i = 0$, so lautet eine $k$-Form $\eta$

$$\eta = \sum_{I \in I(k-1,n)} \eta_{0I}(t,p)\,dt \wedge dx^I + \sum_{J \in I(k,n)} \eta_J(t,p)\,dx^J =: dt \wedge \alpha + \beta.$$

Diese Zerlegung hängt nicht von der Karte $\varphi$ ab, und zwar gilt

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta, \quad \text{ und } \quad \beta = \eta - dt \wedge \Big(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta\Big).$$

Sei $d_x = \sum_{j=1}^n dx^j \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ die *partielle* äußere Ableitung. Wir berechnen

$$d\eta = dt \wedge \frac{\partial \eta}{\partial t} + d_x\eta = dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t} - dt \wedge d_x\alpha + d_x\beta.$$

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \llcorner d\eta = -d_x\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad \text{ und } \quad d\big(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta\big) = d\alpha = dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} + d_x\alpha.$$

Damit haben wir die Formel

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \llcorner d\eta + d\big(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta\big). \tag{6.10}$$

Wir wollen nun die $t$-Variable ausintegrieren. Sei $i_t : M \to [0,1] \times M$, $i_t(p) = (t,p)$. Definiere die Abbildung $I : C^\infty(\Lambda^k T([0,1] \times M)) \to C^\infty(\Lambda^{k-1}TM)$ durch

$$I\eta(p)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \int_0^1 \eta(t,p)\big(\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \ldots, v_{k-1}\big)\,dt. \tag{6.11}$$

Dabei identifizieren wir $v_i \in T_pM$ mit $(0, v_i) \in T_{(t,p)}([0,1] \times M)$. Alternativ gilt die Darstellung

$$I\eta(p) = \int_0^1 \underbrace{(i_t)^*\big(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta\big)(p)}_{\in \Lambda^{k-1}T_pM}\,dt.$$

Mit Parameterdifferentiation und Vertauschung von $d$ und $i_t^*$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d(I\eta) &= d\int_0^1 (i_t)^*\big(\frac{\partial}{\partial t}\llcorner\eta\big)\,dt = \int_0^1 (i_t)^* d\big(\frac{\partial}{\partial t}\llcorner\eta\big)\,dt \\ I(d\eta) &= \int_0^1 (i_t)^*\big(\frac{\partial}{\partial t}\llcorner d\eta\big)\,dt. \end{aligned}$$

Aus (6.10) folgt

$$d(I\eta)+I(d\eta)=\int_0^1 (i_t)^*\frac{\partial\eta}{\partial t}\,dt.$$

Berechne nun für $t_0\in[0,1]$ und $v_1,\ldots,v_k\in T_pM$

$$(i_{t_0})^*\frac{\partial\eta}{\partial t}(p)(v_1,\ldots,v_k)=\frac{\partial\eta}{\partial t}(t_0,p)(v_1,\ldots,v_k)=\frac{\partial}{\partial t}\eta(t,p)(v_1,\ldots,v_k)|_{t=t_0}.$$

Somit folgt

$$d(I\eta)+I(d\eta)=(i_1)^*\eta-(i_0)^*\eta. \tag{6.12}$$

**Bemerkung 6.1** Sei $\Sigma$ eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial\Sigma$, dieser sei induziert orientiert (siehe unten). Es gibt dann eine zu (6.12) analoge Formel für den Rand des Zylinders $[0,1]\times\Sigma$, und zwar gilt (Bild!)

$$\partial([0,1]\times\Sigma)+[0,1]\times\partial\Sigma=\{1\}\times\Sigma-\{0\}\times\Sigma.$$

**Satz 6.2 (Lemma von Poincaré)**[§] *Gegeben sei eine Homotopie $f\in C^\infty([0,1]\times M,N)$. Dann gilt für jede $k$-Form $\omega\in C^\infty(\Lambda^kTN)$ die Homotopieformel*

$$(f_1)^*\omega-(f_0)^*\omega=d(If^*\omega)+I(f^*d\omega)\qquad \textit{wobei } f_t(p)=f(t,p). \tag{6.13}$$

Beweis: Wende (6.12) an mit $\eta=f^*\omega$, also $(i_t)^*\eta=(f\circ i_t)^*\omega=(f_t)^*\omega$. Mit $d\eta=df^*\omega=f^*d\omega$ folgt die Behauptung. □

**Folgerung 6.1 (Homotopieinvarianz)** *Sind $f_0,f_1\in C^\infty(M,N)$ glatt homotop, so sind die induzierten Abbildungen $f_0^*,f_1^*:H^k_{DR}(N)\to H^k_{DR}(M)$ gleich.*

Beweis: Sei $\omega\in Z^k(M)$, also $d\omega=0$. Dann folgt $[f_1^*\omega]=[f_0^*\omega+dIf^*\omega]=[f_0^*\omega]$. □

**Folgerung 6.2** *Ist $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, so gilt $H^k(U)=\{0\}$ für $k\geq 1$.*

Beweis: Sei $U$ sternförmig bezüglich des Punkts $x_0\in U$. Dann ist $f:[0,1]\times U\to U$, $f(t,x)=tx+(1-t)x_0$, eine Homotopie zwischen $f_0\equiv x_0$ und $f_1=\mathrm{id}_U$. Es folgt

$$H^k(U)=\text{Bild } f_1^*=\text{Bild } f_0^*=\begin{cases}\mathbb{R} & \text{für } k=0\\ \{0\} & \text{für } k\geq 1.\end{cases}$$

[§] Henri Poincaré 1895, Vito Volterra 1889

Wir wollen die Stammform hier explizit bestimmen, und zwar ist

$$\begin{aligned} If^*\omega(x)(v_1,\ldots,v_{k-1}) &= \int_0^1 (f^*\omega)(t,x)\big(\frac{\partial}{\partial t}, v_1,\ldots,v_{k-1}\big)\,dt \\ &= \int_0^1 \omega(tx+(1-t)x_0)(x-x_0, tv_1,\ldots,tv_{k-1})\,dt, \end{aligned}$$

das heißt die Stammform von $\omega$ ist

$$I(f^*\omega) = \int_0^1 t^{k-1}(x-x_0)\llcorner\omega(tx+(1-t)x_0)\,dt. \tag{6.14}$$

□

Für die Definition des Integrals einer $n$-Form auf einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit brauchen wir den Begriff der Orientierung. Zunächst erinnern wir an dieses Konzept in der Linearen Algebra. Seien $\mathcal{A} = \{a_1,\ldots,a_n\}$, $\mathcal{B} = \{b_1,\ldots,b_n\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $V$. Man hat dann die Transformationsmatrix $T = \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$, also $a_j = \sum_{i=1}^n T_{ij}b_i$ für $j = 1,\ldots,n$. Die Basen heißen gleich orientiert, Symbol $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, wenn $\det T > 0$. Bekanntlich gilt

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \mathrm{E}_n, \quad \mathrm{id}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{A}} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,\mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}.$$

Somit ist $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen. Ist $\sigma$ eine dieser Klassen, so heißt $\sigma$ Orientierung von $V$ und $(V,\sigma)$ ist ein orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Basis $\mathcal{A}$ heißt dann positiv (bzw. negativ) orientiert, wenn $\mathcal{A} \in \sigma$ (bzw. $\mathcal{A} \notin \sigma$). Ein Isomorphismus zwischen orientierten Vektorräumen, also $A : (V,\sigma) \to (W,\tau)$, heißt orientierungstreu, falls gilt:

$$[v_1,\ldots,v_n] = \sigma \quad \Rightarrow \quad [Av_1,\ldots,Av_n] = \tau.$$

Insbesondere ist ein Automorphismus $A : (V,\sigma) \to (V,\sigma)$ genau dann orientierungstreu, wenn $\det A > 0$, und $A$ heißt dann auch orientierungserhaltend.

**Definition 6.5 (Orientierung einer Mannigfaltigkeit)** *Sei $M$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Orientierung von $M$ ist eine Wahl $\sigma(p)$, $p \in M$, der Orientierungen von $T_pM$, so dass gilt: zu $p \in M$ gibt es eine Karte $(U,\varphi)$ mit $p \in U$ und*

$$\sigma|_U = \Big[\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\Big].$$

*$M$ heißt orientierbar, wenn eine Orientierung von $M$ existiert.*

Die Bedingung garantiert, dass die Orientierung nicht lokal beliebig springen kann.

**Lemma 6.4** *$M$ ist genau dann orientierbar, wenn es einen Atlas von $M$ gibt, so dass alle Kartenwechsel positive Jacobideterminante haben.*

Beweis: Seien $(U,\varphi)$ und $(V,\psi)$ Karten auf $M$ mit Basisfeldern $\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ und $\mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial y^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^n}$. Nach (3.6) gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p))\,\frac{\partial}{\partial y^i}(p).$$

Ist $\sigma$ eine Orientierung von $M$, so bilden die Karten aus Definition 6.5 einen Atlas mit der gewünschten Eigenschaft: die Orientierung der Basisfelder ist durch $\sigma$ gegeben und damit gleich auf den Overlaps, also haben die Kartenwechsel positive Jacobideterminante. Ist umgekehrt ein solcher Atlas $\mathcal{A}$ gegeben, so setzen wir für jede Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$

$$\sigma|_U := \Big[\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big].$$

Auf Overlaps stimmen die Definitionen überein, also ist $\sigma$ eine Orientierung von $M$. $\square$

**Lemma 6.5** *Sei $M$ zusammenhängend und orientierbar. Dann gibt es genau zwei Orientierungen von $M$.*

Beweis: Seien $\sigma, \tau$ Orientierungen von $M$. Wir zeigen, dass $G = \{p \in M : \sigma(p) = \tau(p)\}$ offen ist. Zu $p \in G$ wähle Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ mit $p \in U \cap V$, und

$$\sigma|_U = \Big[\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big] \quad \text{sowie } \tau|_V = \Big[\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big].$$

Da $\sigma(p) = \tau(p)$ ist $\det D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) > 0$. Aber dann ist $\det D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi > 0$, und damit $\sigma = \tau$, auf einer Umgebung von $p$. Analog sieht man, dass auch $M \backslash A = \{p \in M : \sigma(p) \neq \tau(p)\}$ offen ist. Somit ist entweder $A = \emptyset$ oder $A = M$, und es gibt höchstens zwei Orientierungen. Ist nun $\sigma$ eine Orientierung von $M$, so können wir in jedem $p \in M$ die entgegengesetzte Orientierung $\tau(p)$ wählen. Ist $\mathcal{A}$ ein Atlas wie in Definition 6.5, so bekommen wir einen entsprechenden Atlas für $\tau$, indem wir jede Karte $(U, \varphi)$ durch $(U, S \circ \varphi)$ ersetzen, wobei $S \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ mit $\det S < 0$. $\square$

Sei jetzt $f : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus, und $\tau$ sei eine Orientierung von $N$. Wir definieren die induzierte Orientierung $f^*\tau$ auf $M$ durch

$$f^*\tau(p) = \big[Df(p)^{-1}w_1, \ldots, Df(p)^{-1}w_n\big] \quad \text{wobei } \tau(f(p)) = [w_1, \ldots, w_n].$$

Aus $w_j' = \sum_{i=1}^n T_{ij} w_i$ folgt $Df(p)^{-1} w_j' = \sum_{i=1}^n T_{ij} Df(p)^{-1} w_i$, also ist $f^*\tau(p)$ wohldefiniert. Wir bestimmen jetzt zu $p \in M$ eine Karte wie in Definition 6.5. Wähle eine Karte $(V, \psi)$ auf $N$ bei $f(p)$ mit mit Basisfeldern $\frac{\partial}{\partial y^i}$ in der Orientierung $\tau$. Es gibt eine Umgebung $U$ von $p$, so dass $f|_U$ diffeomorph auf $f(U) \subset V$ abbildet. Dann ist $(U, \psi \circ f|_U)$ eine Karte von $M$, und für die Basisfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$ dieser Karte gilt, für alle $q \in U$,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(q) = D(\psi \circ f|_U)(q)^{-1} e_i = Df(q)^{-1} D\psi(f(q))^{-1} e_i = Df(q)^{-1} \frac{\partial}{\partial y^i}(f(q)).$$

Nach Definition ist also $f^*\tau = \big[\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big]$ auf $U$.

**Definition 6.6** *Ein lokaler Diffeomorphismus $f : (M, \sigma) \to (N, \tau)$ heißt orientierungstreu (bzw. orientierungsumkehrend), falls $f^*\tau = \sigma$ (bzw. $f^*\tau \neq \sigma$).*

**Beispiel 6.4** $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist orientierbar, und zwar sei

$$\sigma(p) = [v_1, \ldots, v_n] \quad \text{wobei } v_i \in T_pM \text{ mit } \det(p, v_1, \ldots, v_n) > 0.$$

$\sigma(p)$ hängt nicht von der Wahl der Basis $v_1, \ldots, v_n$ ab. Sei weiter $(U, \varphi)$ eine Karte bei $p$ mit $U$ zusammenhängend. Dann ist die Funktion $q \mapsto \det\big(q, \frac{\partial}{\partial x^1}(q), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(q)\big)$ entweder positiv auf $U$ oder negativ auf $U$. Im zweiten Fall schalten wir die Spiegelung an der Hyperebene $x^n = 0$ dahinter; damit haben wir in beiden Fällen eine Karte wie in Definiton 6.5 verlangt. Wir betrachten nun die Antipodenabbildung

$$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n,\ f(p) = -p.$$

Seien $v_i \in T_{-p}\mathbb{S}^n$ mit $\sigma(-p) = [v_1, \ldots, v_n]$, also $\det(-p, v_1, \ldots, v_n) > 0$. Dann gilt $Df(p)^{-1}v_i = -v_i$ und $\det(p, -v_1, \ldots, -v_n) = (-1)^{n+1}\det(-p, v_1, \ldots, v_n)$. Also ist $f^*\sigma = \sigma$ genau wenn $n$ ungerade ist. Konsequenz: $\mathbb{RP}^n$ ist orientierbar genau für $n$ ungerade (Übungsaufgabe).

Der folgende Satz gibt eine dritte Charakterisierung der Orientierbarkeit.

**Satz 6.3** *Für eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit $M$ sind äquivalent:*

(i) *$M$ ist orientierbar*

(ii) *Es gibt eine Form $\omega \in C^\infty(\Lambda^n TM)$ mit $\omega(p) \neq 0$ für alle $p \in M$.*

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): Definiere für alle $q \in M$ die Orientierung

$$\sigma(q) = [v_1, \ldots, v_n] \quad \text{wobei } v_i \in T_qM \text{ mit } \omega(q)(v_1, \ldots, v_n) > 0.$$

Sei $(U, \varphi)$ eine Karte bei $p \in M$ mit $U$ zusammenhängend. Dann gilt $\omega|_U = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ mit $f \neq 0$. Wir können $f > 0$ auf $U$ annehmen, sonst gehe über zu $S \circ \varphi$, wobei $S$ die Spiegelung an $\{x^n = 0\}$ ist. Es folgt $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}) = f > 0$, also $\sigma|_U = [\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}]$ auf $U$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wähle einen orientierten Atlas $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Es gibt dann eine untergeordnete, lokal endliche Teilung der Eins $\eta_\lambda \in C^\infty(M)$, das heißt $\eta_\lambda \geq 0$ und

(a) $\operatorname{spt} \eta_\lambda \subset U_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$,

(b) jedes $p \in M$ hat eine Umgebung $U$ mit $\{\lambda \in \Lambda : \operatorname{spt} \eta_\lambda \cap U \neq \emptyset\}$ endlich.

(c) $\sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda = 1$ auf ganz $M$.

Die Existenz einer solchen Teilung der Eins wird in Satz **??** gezeigt. Definiere nun

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda\, \omega_\lambda \quad \text{wobei } \omega_\lambda = dx_\lambda^1 \wedge \ldots \wedge dx_\lambda^n \quad \text{mit } dx_\lambda^i = d\varphi_\lambda^i.$$

Wegen (a) ist $M$ Vereinigung der offenen Mengen $U_\lambda$ und $M \backslash \operatorname{spt} \eta_\lambda$, also ist $\eta_\lambda\, \omega_\lambda$ glatt. Mit (b) folgt $\omega \in C^\infty(\Lambda^n TM)$. Für $p \in U_\lambda$ berechnen wir für die Basisfelder $\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}$ bezüglich $\varphi_\lambda$

$$\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_\lambda^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_\lambda^n}\Big)(p) = \sum_{\mu \in \Lambda :\, \eta_\mu(p) > 0} \eta_\mu(p)\, \underbrace{\det D(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda(p))}_{>0} > 0.$$

Beachte $\omega_\lambda(\frac{\partial}{\partial x_\lambda^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_\lambda^n}) = 1$ auf $U$. Aus (c) folgt, dass die Summe nicht leer ist. $\square$

# 7 Integration von $n$-Formen

Jetzt kommen wir endlich zur Integration von $n$-Formen. Der folgende Satz spielt dabei eine wesentliche Rolle.

**Transformationssatz** Sei $\phi \in C^1(U, V)$ ein Diffeomorphismus der offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f : V \to [-\infty, \infty]$ messbar bezüglich $\mathcal{L}^n$, so gilt

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(\phi(x))|\det D\phi(x)|\, dx,$$

wenn eines der Integrale existiert.

Die Symbole $dx$ und $dy$ in diesem Satz sind keine Differentialformen. sie stehen für Integration bezüglich des Lebesguemaßes, sind also nur Abkürzungen für $d\mathcal{L}^n(x)$ bzw. $d\mathcal{L}^n(y)$. Auf der Mannigfaltigkeit $M$ haben wir kein kanonisches Maß gegeben, deshalb führen wir den Begriff der Messbarkeit mittels Karten auf $\mathbb{R}^n$ zurück.

**Definition 7.1** *Sei $M$ eine $n$-dimensonale differenzierbare Mannigfaltigkeit. $E \subset M$ heißt messbar (bzw. Nullmenge), wenn $\varphi(E \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ messbar (bzw. Nullmenge) ist bezüglich $\mathcal{L}^n$, für alle Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ von $M$.*

Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine feste Karte, also $U$ bzw. $\varphi(U)$ offen in $M$ bzw. $\mathbb{R}^n$ und $\varphi$ homeomorph. Für $V \subset M$ offen ist dann $\varphi(V \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ offen, also $\mathcal{L}^n$-messbar. Weiter gilt

$$\varphi\big((M\backslash E) \cap U\big) = \varphi(U)\backslash\varphi(E \cap U) \quad \text{ und } \quad \varphi\Big(\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) \cap U\Big) = \bigcup_{i\in I} \varphi(E_i \cap U).$$

Also bilden die Mengen $E$ mit $\varphi(E \cap U)$ messbar eine $\sigma$-Algebra, die die offenen Mengen und damit alle Borelmengen enthält. Um zu zeigen, dass $\varphi(E \cap U)$ für alle Karten messbar ist, reicht der Nachweis bezüglich der Karten $(U_i, \varphi_i)$, $i \in I$, in einem abzählbaren Atlas* Denn

$$\varphi(E \cap U) = \bigcup_{i\in I} \phi_i\big(\varphi_i(E \cap U \cap U_i)\big) \quad \text{ mit } \phi_i = \varphi \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U\cap U_i)}.$$

Der Diffeomorphismus $\phi_i$ bildet messbare Mengen in in messbare Mengen ab (Analysis 3). Ähnlich argumentieren wir bei der Definition der Messbarkeit von $n$-Formen. In lokalen Koordinaten $(U, \varphi)$ hat eine $n$-Form $\omega : M \to \Lambda^k(TM)$ die Darstellung

$$\omega|_U = \omega^\varphi\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Wir nennen $\omega$ messbar, wenn die Funktion $\omega^\varphi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesguemessbar ist, für jede Karte $(U, \varphi)$. Ist $(V, \psi)$ eine andere Karte so gilt auf dem Overlap $U \cap V$

$$\omega^\varphi = \omega^\psi \det D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi. \tag{7.1}$$

Auch hier reicht es, wenn die Messbarkeit für einen festen abzählbaren Atlas erfüllt ist. Sei nun $M$ eine orientierte Mannigfaltigkeit, $E \subset M$ sei messbar und im Gebiet einer orientierten Karte $(U, \varphi)$ enthalten. Eine messbare $n$-Form auf $M$ nennen wir auf $E$ integrierbar, falls

$$\|\omega\|_{L^1(E)} := \int_{\varphi(E)} |\omega^\varphi \circ \varphi^{-1}(x)|\, dx < \infty.$$

*jeder Atlas hat einen abzählbaren Teilatlas, vgl. Satz 1.1.

Ist das der Fall, so definieren wir das Integral

$$\int_E \omega := \int_{\varphi(E)} \omega^\varphi \circ \varphi^{-1}(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

Beide Definitionen hängen nicht von der Wahl der Karte ab: sei $(V,\psi)$ eine andere orientierte Karte mit $E \subset V$. Dann folgt aus (7.1) mit der Substitution $y = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$ auf $U \cap V \supset E$

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(E)} |\omega^\psi \circ \psi^{-1}(y)|\,dy &= \int_{\varphi(E)} |\omega^\psi \circ \varphi^{-1}(x)|\,|\det D(\psi \circ \varphi^{-1})(x)|\,dx \\
&= \int_{\varphi(E)} |\omega^\varphi \circ \varphi^{-1}(x)|\,dx < \infty.
\end{aligned}$$

Da die Karten gleich orientiert sind, also $\det D(\psi \circ \varphi^{-1}) > 0$, folgt weiter

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(E)} \omega^\psi \circ \psi^{-1}(y)\,dy &= \int_{\varphi(E)} \omega^\psi \circ \varphi^{-1}(x)\,|\det D(\psi \circ \varphi^{-1})(x)|\,dx \\
&= \int_{\varphi(E)} \omega^\varphi \circ \varphi^{-1}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Folgender Hinweis ist hier angebracht: die Integrierbarkeit und das Integral einer Funktion kann nicht auf diese Weise mittels Karten erklärt werden. Zum Beispiel gilt für die konstante Funktion $f(x) = 1$ auf $\mathbb{R}$ und die Karte $\varphi(x) = \arctan x$

$$\int_{\varphi(\mathbb{R})} f \circ \varphi^{-1}(y)\,dy = \pi \neq \infty = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

Es ist wesentlich, dass das Transformationsgesetz (7.1) anders ist als bei Funktionen.

Um nun das Integral einer messbaren $n$-Form $\omega$ auf ganz $M$ zu definieren, wählen wir eine höchstens abzählbare messbare Zerlegung $M = \bigcup_{i\in I} E_i$, so dass $E_i \subset U_i$ für eine orientierte Karte $(U_i,\varphi_i)$. Das ist immer möglich: nach Satz 1.1 ist $M$ $\sigma$-kompakt, also existiert ein orientierter Atlas $(U_i,\varphi_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Wir können dann $E_i = U_i \backslash (U_1 \cup \ldots \cup U_{i-1})$ wählen. Wir bezeichnen mit $L^1(\Lambda^n TM)$ den Raum der messbaren $n$-Formen mit

$$\|\omega\|_{L^1(M)} = \sum_{i\in I} \|\omega\|_{L^1(E_i)} < \infty. \tag{7.2}$$

Das Integral von $\omega \in L^1(\Lambda^n TM)$ definieren wir durch

$$\int_M \omega = \sum_{i\in I} \int_{E_i} \omega. \tag{7.3}$$

Diese Definitionen hängen wieder nicht von der Wahl der Zerlegung und der Karten ab: sei $M = \bigcup_{j\in J} F_j$ eine andere abzählbare, messbare Zerlegung mit $F_j \subset V_j$ für orientierte Karten $\psi_j : V_j \to \psi_j(V_j)$. Mit dem Satz über monotone Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J} \int_{\psi_j(F_j)} |\omega^{\psi_j} \circ \psi_j^{-1}(y)|\,dy &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} \int_{\psi_j(E_i\cap F_j)} |\omega^{\psi_j} \circ \psi_j^{-1}(y)|\,dy \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \int_{\varphi_i(E_i\cap F_j)} |\omega^{\varphi_i} \circ \varphi_i^{-1}(x)|\,dx \\
&= \sum_{i\in I} \int_{\varphi_i(E_i)} |\omega^{\varphi_i} \circ \varphi_i^{-1}(x)|\,dx < \infty.
\end{aligned}$$

Somit ist der Raum $L^1(\Lambda^n TM)$ und die $L^1$-Norm unabhängig von der Wahl der Zerlegung. Für $\omega \in L^1(\Lambda^n TM)$ folgt analog, aber jetzt mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue,

$$\sum_{j\in J} \int_{\psi_j(F_j)} \omega^{\psi_j} \circ \psi_j^{-1}(y)\, dy = \sum_{i\in I} \int_{\varphi_i(E_i)} \omega^{\varphi_i} \circ \varphi_i^{-1}(x)\, dx.$$

Also ist auch das Integral von $\omega$ unabhängig von der Zerlegung definiert. Hier noch drei Bemerkungen zur Definition des Integrals:

(a) Für eine Teilung der Eins $\eta_i$, $i \in I$, gilt (Übungsaufgabe)

$$\int_M \omega = \sum_{i\in I} \int_M \eta_i \omega \qquad \text{für } \omega \in L^1(\Lambda^n TM).$$

(b) Es gilt $C^0_c(\Lambda^n TM) \subset L^1(\Lambda^n TM)$.

(c) Seien $M, N$ orientierte, $n$-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Ist $\phi \in C^1(M,N)$ orientierungstreuer (bzw. orientierungsumkehrender) Diffeomorphismus und $\omega \in L^1(\Lambda^n TN)$, so ist $\phi^*\omega \in L^1(\Lambda^n TM)$ und es gilt

$$\int_M \phi^*\omega = \pm \int_N \omega.$$

Die letzte Aussage wollen wir noch zeigen. Seien $(U,\varphi)$ und $(V,\psi)$ orientierte Karten von $M$ bzw. $N$, so dass $\phi(U) \subset V$. Auf $U$ gilt dann

$$\phi^*\omega = \phi^*(\omega^\psi\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n) = \omega^\psi \circ \phi \, \det D(\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Für $E \subset U$ messbar folgt aus dem Transformationssatz mit der Substitution $y = \psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{L^1(\phi(E))} &= \int_{\psi\circ\phi(E)} |\omega^\psi \circ \psi^{-1}(y)|\, dy \\ &= \int_{\varphi(E)} |\omega^\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}(x)|\, |\det D(\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1})(x)|\, dx \\ &= \|\phi^*\omega\|_{L^1(E)}. \end{aligned}$$

Weiter berechnen wir, wieder mit dem Transformationssatz,

$$\int_{\phi(E)} \omega = \int_{\varphi(E)} \omega^\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}(x)\, |\det D(\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1})(x)|\, dx = \pm \int_E \phi^*\omega.$$

Das Vorzeichen ist je nach Orientierung von $\phi$. Sei nun $F_j$, $j \in J$, eine messbare Zerlegung von $N$ mit $F_j \subset V_j$ für Karten $(V_j, \psi_j)$. Dann ist $E_j = \phi^{-1}(F_j)$ eine messbare Zerlegung von $M$, und es gilt $E_j \subset U_j$ für die Karten $(U_j = \phi^{-1}(V_j), \varphi_j = \psi_j \circ \phi)$. Da $\phi(U_j) = V_j$ folgt Aussage (c) aus der Rechnung oben durch Summation über $j \in J$.

Um den Satz von Stokes zu formulieren, benötigen wir noch den Begriff der Mannigfaltigkeit mit Rand. Das Standardmodell ist der abgeschlossene Halbraum $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \leq 0\}$. Als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ hat $H^n$ ein Inneres und einen Rand:

$$\operatorname{int} H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 < 0\} \quad \text{und} \quad \partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 = 0\}.$$

Wir versehen $H^n$ mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie. Eine Menge $V \subset H^n$ ist somit offen genau wenn $V = W \cap H^n$ mit $W$ offen in $\mathbb{R}^n$. Es folgt

$$\begin{aligned} V \cap \operatorname{int} H^n &= W \cap \operatorname{int} H^n \text{ ist offen in } \mathbb{R}^n, \\ V \cap \partial H^n &= W \cap \partial H^n \quad \text{ist offen in } \partial H^n \cong \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned}$$

**Definition 7.2 (Mannigfaltigkeit mit Rand)** *Ein topologischer Raum (Hausdorffsch mit abzählbarer Umgebungsbasis) heißt n-dimensonale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand, falls es einen $C^0$-Atlas $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$, $i \in I$, gibt mit $\varphi_i(U_i)$ offen in $H^n$. $M$ heißt differenzierbar, wenn der Atlas $C^\infty$-Kartenwechsel hat.*

Hier ist zu erklären, wie die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel aufzufassen ist. Für $V \subset H^n$ offen bezeichnen wir mit $C^k(V)$ die Menge aller Funktionen $f \in C^k(V \cap \operatorname{int} H^n)$, deren Ableitungen $D^\alpha f$, $0 \leq |\alpha| \leq k$, stetig auf ganz $V$ fortsetzbar sind. Da jeder Punkt in $V$ Häufungspunkt von $V \cap \operatorname{int} H^n$ ist, sind die Fortsetzungen eindeutig bestimmt, wir bezeichnen sie wieder mit $D^\alpha f$. Es gilt mit $\overline{D} = (\partial_2, \ldots, \partial_n)$

$$(7.4) \qquad f|_{V \cap \partial H^n} \in C^k(V \cap \partial H^n) \text{ mit } \overline{D}^\alpha (f|_{V \cap \partial H^n}) = \big(\overline{D}^\alpha f\big)|_{V \cap \partial H^n} \quad \text{für } 0 \leq |\alpha| \leq k.$$

Denn für $\varepsilon \searrow 0$ konvergieren die Funktionen $f_\varepsilon(y) = f(y - \varepsilon e_1)$ lokal auf $V \cap \partial H^n$ gegen $f(y)$, und alle Ableitungen $\overline{D}^\alpha f_\varepsilon$ konvergieren lokal gleichmäßig gegen $\big(\overline{D}^\alpha f\big)|_{V \cap \partial H^n}$.

**Lemma 7.1** *Seien $(U_i, \varphi_i)$, $i = 1, 2$, Karten bei $p \in M$. Dann gelten für den Kartenwechsel $\phi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V_2$, wobei $V_i = \varphi_i(U_1 \cap U_2)$, folgende Aussagen:*

(a) $\phi(V_1 \cap \operatorname{int} H^n) = V_2 \cap \operatorname{int} H^n$,

(b) $\phi(V_1 \cap \partial H^n) = V_2 \cap \partial H^n$,

(c) $D\phi(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *für alle* $x \in V_1$.

Beweis: Sei $x \in V_1 \cap \operatorname{int} H^n$. Wir nehmen erst per Widerspruch an dass $\phi(B) \subset \partial H^n$ für eine Umgebung $B = B_\delta(x) \subset \operatorname{int} H^n$. Mit $\psi = \phi^{-1}|_{V_2 \cap \partial H^n}$ folgt

$$\mathrm{id}_B = \phi^{-1} \circ \phi|_B = \psi \circ \phi|_B.$$

Nach (7.4) ist $\psi$ differenzierbar, also folgt mit der Kettenregel $\mathrm{E}_n = D\psi(\phi(x)) D\phi(x)$. Die Ableitung von $\psi$ hat aber höchstens Rang $n-1$, Widerspruch. Also existiert eine Folge $x_k \to x$ mit $\phi(x_k) \in V_2 \cap \operatorname{int} H^n$, und nach Kettenregel gilt

$$\mathrm{E}_n = D\phi^{-1}(\phi(x_k))\, D\phi(x_k).$$

Alle beteiligten Funktionen sind stetig, also gilt auch $\mathrm{E}_n = D\phi^{-1}(\phi(x)) D\phi(x)$, und $D\phi(x)$ ist invertierbar. Nach dem Satz über inverse Funktionen ist $\phi(B_\delta(x))$, für $\delta > 0$ klein, offen im $\mathbb{R}^n$. Also ist $\phi(x) \in \operatorname{int} H^n$ und damit $\phi(V_1 \cap \operatorname{int} H^n) \subset V_2 \cap \operatorname{int} H^n$. Durch Anwendung auf $\phi^{-1}$ folgt Aussage (a), und (b) ergibt sich direkt. Für (c) verwenden wir, dass jedes $x \in V_1$ Grenzwert einer Folge $x_k \in V_1 \cap \operatorname{int} H^n$ ist, und argumentieren wie oben. □

Für Punkte $p \in M$ ergibt sich folgende Dichotomie:

- entweder gilt $\varphi(p) \in \operatorname{int} H^n$ für alle Karten $(U, \varphi)$ bei $p$, diese Punkte nennen wir innere Punkte (Bezeichnung: $p \in \operatorname{int} M$),

- oder es gilt $\varphi(p) \in \partial H^n$ für alle Karten $(U, \varphi)$ bei $p$, diese Punkte heißen Randpunkte (Bezeichnung: $p \in \partial M$).

*Hinweis.* Die Definition von $\operatorname{int} H^n$ und $\partial H^n$ bezog sich auf die Topologie des $\mathbb{R}^n$. Für die Mengen $\operatorname{int} M$ und $\partial M$ ist das anders, denn $M$ ist a priori gar nicht Teilmenge irgendeines umgebenden topologischen Raums.

Jede Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist mit der induzierten Topologie Hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis, siehe Beispiel 1.3 und Satz 1.1. Indem wir das Gebiet der Karte gegebenenfalls verkleinern, haben wir zu jedem $p \in \operatorname{int} M$ eine Karte $(U, \varphi)$ bei $p$ mit $\varphi(U) \subset \operatorname{int} H^n$, das heißt $\varphi(U)$ ist offen im $\mathbb{R}^n$. Damit ist $\operatorname{int} M$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Auf $\partial M$ haben wir den $C^0$-Atlas

$$\varphi|_{U \cap \partial M} : U \cap \partial M \to \varphi(U) \cap \partial H^n.$$

Hier ist $\varphi(U)$ offen in $H^n$, also $\varphi(U) \cap \partial H^n$ offen in $\partial H^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Nach (7.4) sind die Kartenwechsel differenzierbar, also ist $\partial M$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$.

Die Definition des Tangentialbündels, siehe Satz 4.2, ist auch im Fall einer $n$-dimensionalen, differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$ mit Rand anwendbar. Dabei ist wesentlich, dass nach Lemma 7.1(c) die Kartenwechsel invertierbare Ableitung haben, auch in Randpunkten. Ist $(U, \varphi)$ eine Karte, so haben wir insbesondere wieder die Basisfelder

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = D\varphi(p)^{-1} e_j \quad \text{für } p \in U.$$

Sei nun $p \in \partial M$, und $v \in T_p M$ habe die Basisdarstellung

$$v = \sum_{j=1}^n v_\varphi^j \frac{\partial}{\partial x^j}(p).$$

Ist $v_\varphi^1 > 0$, so nennen wir $v$ nach außen weisend. Dieser Begriff hängt nicht von der Karte ab. Sei dazu $(V, \psi)$ eine andere Karte bei $p$. Nach (3.6), mit $f = \mathrm{id}_M$ und $\phi = \psi \circ \varphi^{-1}$, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}(x) \frac{\partial}{\partial y^i}(p) \quad \text{mit } x = \varphi(p).$$

Wir haben $\phi^1 \leq 0$ auf $\varphi(U)$ und $\phi^1 = 0$ auf $\varphi(U) \cap \partial H$. Daraus folgt

$$\frac{\partial \phi^1}{\partial x^j}(x) \quad \begin{cases} = 0 & \text{für } j = 2, \ldots, n, \\ \geq 0 & \text{für } j = 1. \end{cases}$$

Für $j \geq 2$ beachte (7.4), für $j = 1$ wende den Mittelwertsatz an auf $\phi^1(x + te_1)$ mit $t < 0$:

$$0 \leq \frac{\phi^1(x + te_1) - \phi^1(x)}{t - 0} = \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1}(x + \tau e_1) \xrightarrow{t \nearrow 0} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1}(x).$$

Tatsächlich gilt für $j = 1$ die strikte Ungleichung, sonst wäre $D\phi(x)$ nicht surjektiv im Widerspruch zu Lemma 7.1(c). Für die Basisdarstellung von $v$ folgt

$$v = \sum_{j=1}^n v_\varphi^j \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}(x) \frac{\partial}{\partial y^i}(p), \quad \text{also } v_\psi^1 = v_\varphi^1 \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1}(x) > 0.$$

Sei nun $\sigma$ eine Orientierung auf $M$. Wir definieren auf $\partial M$ eine induzierte Orientierung $\sigma_{\partial M}$. Für $p \in \partial M$ sei $v \in T_pM$ nach außen weisend. Dann setzen wir

$$\sigma_{\partial M}(p) = [v_2, \ldots, v_n] \quad \text{falls} \quad \sigma(p) = [v, v_2, \ldots, v_n]. \tag{7.5}$$

Ist $(U, \varphi)$ eine Randkarte von $M$, so sind die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ positiv orientiert, denn $\frac{\partial}{\partial x^1}$ weist nach außen. Also ist der induzierte Atlas von $\partial M$ positiv orientiert.

**Beispiel 7.1** Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist $D$ eine orientierte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial D$. Für $(x,y) \in \partial D$ ist der Vektor $(-y,x)$ positiv orientiert, denn der Vektor $(x,y)$ weist nach außen, und $(x,y),(-y,x)$ ist eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$.

Der folgende Satz wird üblicherweise als allgemeiner Satz von Stokes bezeichnet. Tatsächlich betrachtete Stokes ein Vektorfeld $X$ auf $\mathbb{R}^3$, mit zugehörigem Rotationsfeld $\operatorname{rot} X$. Für eine parametrisierte Fläche $M$ gilt dann (1854): das Kurvenintegral von $X$ längs $\partial M$ ist gleich dem Fluss des Felds $\operatorname{rot} X$ durch die Fläche $M$, also in klassischer Notation

$$\int_{\partial M} X \cdot \overrightarrow{ds} = \int_M \operatorname{rot} X \cdot \overrightarrow{dA}.$$

Die sogenannte Vektoranalysis mit den Operatoren div und rot hat übrigens Maxwell eingeführt (1873). Die erste höherdimensionale Version des Satzes von Stokes stammt von Volterra (1889). Der Kalkül der Differentialformen wurde von Poincaré und Élie Cartan um 1900 entwickelt. Dieser hat dann in seinen Vorlesungen 1936-37 die moderne Fassung des Satzes von Stokes formuliert und diese später auch publiziert.†

**Satz 7.1 (Stokes-Cartan)** *Sei $M$ eine $n$-dimensionale, orientierte und kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M$. Dann gilt für $\omega \in C^1(\Lambda^{n-1}TM)$*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega. \tag{7.6}$$

*Dabei ist $i : \partial M \to M$ die Inklusionsabbildung, und $\partial M$ hat die induzierte Orientierung.*

Beweis: Sei erst $\omega$ eine Form mit kompaktem Träger auf $H^n$. Wir schreiben dann

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \omega_j \, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n, \qquad \text{also ist} \\
d\omega &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Mit Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned}
\int_{H^n} d\omega &= \int_{H^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1}(x^1, y) \, dx^1}_{=\omega_1(0,y)} \, dy + \sum_{i=2}^n \int_{-\infty}^0 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x^1, y) \, dy}_{=0} \, dx^1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1(0,y) \, dy.
\end{aligned}$$

†Elie Cartan: Les systèmes différentielles extérieurs et leurs applications géometriques, Hermann Paris 1945.

Auf $\partial H^n$ betrachten wir die Karte $\varphi(0,y) = y$. Nach (6.2) gilt mit $dy^j = d\varphi^j$

$$(i^* dx^j)(0,y) = d(x^j \circ i)(0,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 1, \\ dy^{j-1} & \text{für } j = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Also folgt $i^*\omega(0,y) = \omega_1(0,y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}$. Die Basisfelder der Karte sind $e_2, \ldots, e_n$, also hat sie die induzierte Orientierung. Die Aussage des Satzes folgt, denn

$$\int_{\partial H^n} i^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1(0,y)\, dy.$$

Als nächstes betrachte den Fall dass $\omega$ kompakten Träger im Gebiet einer orientierten Karte $\varphi : U \to \varphi(U) \subset H^n$ hat. Mit Schritt 1 gilt

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{H^n} (\varphi^{-1})^* d\omega = \int_{H^n} d(\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\partial H^n} i^*_{\partial H^n} (\varphi^{-1})^*\omega, \\ \int_{\partial M} i^*_{\partial M}\omega &= \int_{\partial H^n} \big((\varphi|_{\partial M \cap U})^{-1}\big)^* \, i^*_{\partial M}\omega. \end{aligned}$$

Da $\varphi^{-1} \circ i_{\partial H^n} = i_{\partial M} \circ (\varphi_{\partial M \cap U})^{-1}$, folgt die Behauptung.

Schließlich zum allgemeinen Fall. Da $M$ kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung $U_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, mit Kartenumgebungen, und dazu eine endliche, lokal untergeordnete Teilung der Eins $\eta_j$, $j \in J$. Das heißt zu $j \in J$ gibt es ein $\lambda \in \Lambda$ mit $\operatorname{spt} \eta_j \subset\subset U_\lambda$. Es folgt

$$\int_M d\omega = \int_M d\Big(\sum_{j \in J} \eta_j \omega\Big) = \sum_{j \in J} \int_M d(\eta_j\omega) = \sum_{j \in J} \int_{\partial M} i^*(\eta_j\omega) = \int_{\partial M} i^*\omega.$$

Der Satz ist bewiesen. $\square$

Wenn man an Ästhetik interessiert ist, kann man den pullback im Satz auch unterdrücken. Bei aller Begeisterung muss gesagt werden, dass die wesentliche Arbeit für diese Aussage im Kalkül der Differentialformen und in der Definition der Begriffe (Mannigfaltigkeit, Orientierung, Rand,...) steckt. Am Ende ist alles so arrangiert, dass sich der Satz auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung reduziert.

# 8 Definition der Riemannschen Mannigfaltigkeit

Sei $M$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für $p \in M$ bezeichnen wir mit $T_p^{2,0}M$ den Vektorraum der Bilinearformen auf $T_pM$, und betrachten das Bündel

$$T^{2,0}M = \bigcup_{p \in M} T_p^{2,0}M.$$

Allgemeiner bezeichnet $T_p^{r,0}M$ den Raum der $r$-linearen Formen auf $TM$, und $T_p^{r,1}M$ den Raum der $r$-linearen Abbildungen mit Werten in $T_pM$, zum Beispiel $T_p^{1,1}M = \operatorname{End}(TM)$. Aber hier geht es nur um Bilinearformen.

Die Bündelprojektion $\pi : T^{2,0}M \to M$ ist natürlich $\pi(b) = p$ für $b \in T^{2,0}_p M$. Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit Feldern $\frac{\partial}{\partial x^i}$ haben wir die Basisformen

$$dx^i \otimes dx^j \in T^{2,0}U, \;\; (dx^i \otimes dx^j)(v,w) = v^i w^j \quad \text{wobei } 1 \leq i,j \leq n.$$

Ein Schnitt $b : M \to T^{2,0}M$, also $b(p) \in T^{2,0}_p M$, hat die lokale Darstellung

$$b = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\, dx^i \otimes dx^j, \quad \text{mit } b_{ij} = b\big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\big) : U \to \mathbb{R}.$$

**Definition 8.1 (Riemannsche Metrik)** *Ein Schnitt $g \in C^\infty(T^{2,0}M)$ heißt Riemannsche Metrik, wenn für jedes $p \in M$ die Bilinearform $g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt ist, also symmetrisch und positiv definit.*

Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ haben wir die Matrixfunktion

$$G : U \to \mathbb{R}^{n \times n},\; G(p) = \big(g_{ij}(p)\big)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Der Schnitt $g \in C^\infty(T^{2,0}M)$ ist genau dann eine Riemannsche Metrik, wenn für jede Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ und jedes $p \in U$ die Matrix $G(p)$ symmetrisch und positiv definit ist, also

$$g_{ij}(p) = g_{ji}(p) \text{ für } 1 \leq i,j \leq n \quad \text{und} \quad \langle G(p)v, v\rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) v^i v^j > 0 \quad \text{für } v \neq 0.$$

Ist $\psi : V \to \psi(V)$, $y = \psi(p)$, eine weitere Karte, so gilt auf dem Overlap $U \cap V$ nach (3.6)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} \quad \text{mit } \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(\psi^k \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{x=\varphi(p)}.$$

Daraus folgt für eine Riemannsche Metrik $g$ (bzw. jede Bilinearform), vgl. (3.9),

$$g^\varphi_{ij} = g\big(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}\big) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^l}{\partial x^j} g^\psi_{kl},$$

oder in Matrixschreibweise

$$G^\varphi = DF^{\mathrm{T}} \circ \varphi \; G^\psi \; DF \circ \varphi \quad \text{mit } F = \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}.$$

**Satz 8.1 (Riemannsches Volumen)** *Sei $(M,g)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Maß $\mu_g$, das Volumenmaß von $g$, mit*

$$\mu_g(E) = \int_{\varphi(E)} \sqrt{\det G}\,(\varphi^{-1}(x))\, dx,$$

*falls $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte und $E \subset U$ Lebesgue-messbar.*

Beweis: Sei $\psi : V \to \psi(V)$ andere Karte mit $E \subset V$, und $F = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$. Die Transformationsformel der Metrik ergibt

$$(\det G^\varphi) \circ \varphi^{-1} = \det\big(DF^{\mathrm{T}} G^\psi \circ \varphi^{-1} \det DF\big) = (\det G^\psi) \circ \varphi^{-1} |\det DF|^2.$$

Mit Substitution $y = F(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$ folgt aus dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(E)} \sqrt{\det G}(\varphi^{-1}(x))\,dx &= \int_{\varphi(E)} \sqrt{\det G^{\psi}}(\varphi^{-1}(x))|\det DF(x)|\,dx \\ &= \int_{F(\varphi(E))=\psi(E)} \sqrt{\det G^{\psi}}(\psi^{-1}(y))\,dy.\end{aligned}$$

Wähle nun eine messbare Zerlegung $M = \bigcup_{i\in I} E_i$, wobei jedes $E_i$ in einem Kartengebiet liegt, und setze für $E \subset M$ messbar

$$\mu_g(E) = \sum_{i\in I} \mu_g(E \cap E_i).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mu_g$ ein wohldefiniertes Maß auf $M$ ist. $\square$

Weitere assoziierte Größen sind

- die Länge $\|v\| = \sqrt{g(p)(v,v)}$ eines Vektors $v \in T_pM$
- der Winkel $\angle(v,w) = \arccos g(p)(v,w)$ zwischen $v, w \in T_pM$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$.

**Lemma 8.1** *Sei $(M,g)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit.*

(a) *Sei $f \in C^1(M)$, und $\operatorname{grad}_g f(p)$ bezeichne den eindeutigen Vektor in $T_pM$ mit*

$$g(p)(\operatorname{grad}_g f(p), v) = Df(p)v \quad \text{für alle } v \in T_pM.$$

*Dann gilt bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$*

$$\operatorname{grad}_g f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{wobei } g^{ij} := (G^{-1})_{ij}.$$

*Insbesondere ist $\operatorname{grad}_g f \in C^{k-1}(TM)$ falls $f \in C^k(M)$, $k \geq 1$.*

(b) *Zu $X \in C^1(TM)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $\operatorname{div}_g X \in C^0(M)$ mit*

$$\int_M g(\operatorname{grad}_g \eta, X)\,d\mu_g = -\int_M \eta \operatorname{div}_g X\,d\mu_g \quad \text{für alle } \eta \in C_c^{\infty}(M).$$

*Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ gilt*

$$(\operatorname{div}_g X) \circ \varphi^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\sqrt{\det G}\, X^i \circ \varphi^{-1}\big).$$

*Insbesondere ist $\operatorname{div}_g X \in C^{k-1}(M)$ falls $X \in C^k(TM)$.*

Beweis: Für (a) berechnen wir

$$g\Big(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} g^{ij} g_{jk}}_{=\delta^i_k} = \frac{\partial f}{\partial x^k} = df\big(\frac{\partial}{\partial x^k}\big).$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechung gilt die Implikation

$$\int_M \eta f \, d\mu_g = 0 \text{ für alle } \eta \in C_c^\infty(M) \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

Somit ist die gesuchte Funktion in (b) eindeutig bestimmt; wir definieren $\mathrm{div}_g X$ auf dem Gebiet einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ durch die Formel. Dann gilt für $\eta \in C_c^\infty(U)$

$$g(\mathrm{grad}_g \eta, X) = D\eta \cdot X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x^i} X^i.$$

Es folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_M g(\mathrm{grad}_g \eta, X) \, d\mu_g &= \int_{\varphi(U)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\eta \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} X^i \circ \varphi^{-1} \sqrt{\det G} \, dx \\
&= -\int_{\varphi(U)} \eta \circ \varphi^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \big( X^i \circ \varphi^{-1} \sqrt{\det G} \big) \, dx \\
&= -\int_U \eta \, \mathrm{div}_g X \, d\mu_g.
\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit stimmen die Formeln für zwei Karten auf den Overlaps überein. Für $\eta \in C_c^\infty(M)$ überdecke den Träger mit Kartengebieten und verwende eine untergeordnete Teilung der Eins. □

**Lemma 8.2** *Sei $(M, g)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M$. Dann gibt es auf $\partial M$ ein eindeutig bestimmtes Normalenfeld $\nu : \partial M \to TM$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\nu(p) \perp T_p(\partial M)$ *bezüglich* $g$,

(2) $\|\nu(p)\| = 1$,

(3) $\nu(p)$ *weist nach außen.*

Beweis: Sei $\varphi : U \to \varphi(U) \subset H^n$ Randkarte von $M$. Betrachte $N : \partial M \cap U \to TM$, $N = \sum_{j=1}^n g^{j1} \frac{\partial}{\partial x^j}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, N\Big) &= \sum_{j=1}^n g_{ij} g^{j1} = 0 \qquad \text{für } i = 2, \ldots, n, \\
g(N, N) &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij} g^{i1} g^{j1} = g^{11}, \\
\langle D\varphi(p) N, e_1 \rangle &= g^{11} > 0.
\end{aligned}$$

Somit hat das Vektorfeld $\nu : \partial M \cap U \to TM$, $\nu = N/\sqrt{g^{11}}$, alle gewünschten Eigenschaften. Wegen Eindeutigkeit stimmen diese Definitionen auf den Overlaps überein. □

**Satz 8.2 (Riemannscher Satz von Gauß)** *Sei $(M,g)$ kompakte Riemannsche Mannighfaltigkeit mit Rand $\partial M$. Dann gilt für $X \in C^1(TM)$*

$$\int_M \mathrm{div}_g X \, d\mu_g = \int_{\partial M} g(X,\nu)\, d\sigma_g. \tag{8.7}$$

*Dabei ist $\sigma_g$ das Riemannsche Oberflächenmaß auf $\partial M$, und $\nu$ die Riemannsche äußere Normale.*

Beweis: Mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

*Fall 1:* spt $X$ liegt im Gebiet einer inneren Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$

$$\int_M \mathrm{div}_g X \, d\mu_g = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\sqrt{\det G} X^i\big) \sqrt{\det G}\, dx = 0.$$

*Fall 2:* spt $X$ liegt im Gebiet einer Randkarte $\varphi : U \to \varphi(U)$

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{div}_g X \, d\mu_g &= \int_{\partial H^n} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x^1}\big(\sqrt{\det G}\big)(x^1,y)\, dx^1\, dy \\
&\quad + \sum_{i=2}^n \int_{-\infty}^0 \int_{\partial H^n} \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\sqrt{\det G}\, X^i\big)(x^1,y)\, dy\, dx^1 \\
&= \int_{\partial H^n} \big(\sqrt{\det G}\, X^1\big)(0,y)\, dy.
\end{aligned}$$

Für das Randintegral berechnen wir mit Lemma 8.2

$$g(X,\nu) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} g^{1j} = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} X^1.$$

Das Oberflächenmaß ist $d\sigma_g = \sqrt{\det \widehat{G}_{11}}$, wobei sich $\widehat{G}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ aus $G$ durch Streichen der ersten Zeile und Spalte ergibt. Mit der Cramerschen Regel folgt

$$g(X,\nu)\, d\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \sqrt{\det \widehat{G}_{11}}\, X^1\, dy = \sqrt{\det G}\, dy.$$

*Fall 3:* $X \in C^1(TM)$ beliebig
Überdeckung von $M$ mit endlich vielen Kartengebiete und untergeordnete Teilung der Eins.

$\square$

Was ist die Relation der Sätze von Gauß und Stokes? Ist $M$ orientierbar, so können wir die Riemannsche Volumenform $\omega_g \in C^\infty(\Lambda^n TM)$ definieren, bezüglich einer orientierten Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ lautet sie

$$\omega_g = \sqrt{\det G^\varphi}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Ist $\psi : V \to \psi(V)$, $y = \psi(p)$, eine andere Karte, so gilt mit $F = \psi \circ \varphi^{-1}$

$$\begin{aligned}
G^\varphi &= DF^{\mathrm{T}} \circ \varphi\, G^\psi\, DF \circ \varphi \\
dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n &= \det DF \circ \varphi\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \\
\sqrt{\det G^\varphi}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n &= \mathrm{sign}\,(\det DF \circ \varphi) \sqrt{\det G^\psi}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n.
\end{aligned}$$

Indem wir einen orientierten Atlas verwenden, ist $\omega_g$ wohldefiniert, und es gilt

$$\int_M f\,\omega_g = \int_M f\,d\mu_g.$$

Betrachte nun für $X \in C^1(TM)$ die $(n-1)$-Form

$$X \llcorner \omega_g(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \omega_g(X, v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

In lokalen Koordinaten gilt

$$X \llcorner \omega_g = \sum_{i=1}^n \sqrt{\det G}\, X^i (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Wir berechnen damit

$$d(X \llcorner \omega_g) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\sqrt{\det G} X^i\big)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = (\operatorname{div}_g X)\,\omega_g. \tag{8.8}$$

Da $n$ Vektoren in $T(\partial M)$ linear abhängig sind, gilt

$$i^*_{\partial M}(X \llcorner \omega_g) = \omega_g(X, \ldots)|_{T(\partial M)} = g(X,\nu)\,\omega_g(\nu, \ldots)|_{T(\partial M)}.$$

In einer orientierten Randkarte $\varphi : U \to \varphi(U)$ von $M$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\omega_g\Big(\nu, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big) &= \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \Big(\sum_{j=1}^n \frac{g^{j1}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big)\\
&= \sqrt{\det G}\,\sqrt{g^{11}} = \sqrt{\det \widehat{G}_{11}}.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt verwendet wieder die Cramersche Regel. Also haben wir gezeigt

$$i^*_{\partial M}(X \llcorner \omega_g) = g(X,\nu)\,\omega_g^{\partial M}. \tag{8.9}$$

Hier ist $\omega_g^{\partial M}$ die $(n-1)$-dimensionale Volumenform der Metrik $g|_{\partial M}$ bezüglich der induzierten Orientierung. Integration von (8.8) und (8.9) ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
\int_M d(X \llcorner \omega_g) &= \int_M \operatorname{div}_g X\,\omega_g = \int_M \operatorname{div}_g X\, d\mu_g,\\
\int_{\partial M} i^*_{\partial M}(X \llcorner \omega_g) &= \int_{\partial M} g(X,\nu)\,\omega_g^{\partial M} = \int_{\partial M} g(X,\nu)\, d\sigma_g.
\end{aligned}$$

Jede $(n-1)$-Form $\xi$ hat eine Darstellung $X \llcorner \omega_g$, in lokalen Koordinaten gilt

$$X = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{für } \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Wir zeigen unten dass eine Riemannsche Metrik immer existiert. Gauß ist etws allgemeiner als Stokes, insofern als $M$ nicht orientierbar sein muss. Aber lokal sind beide Sätze äquivalent und folgen ganz analog aus Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

**Satz 8.3 (Existenz Riemannscher Metriken)** *Auf jeder $n$-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit gibt es eine (glatte) Riemannsche Metrik.*

BEWEIS: Sei $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \varphi_\lambda(U_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, ein lokal endlicher Atlas von $M$, vgl. Satz 1.1. Wähle auf $U_\lambda$ die glatte Riemannsche Metrik

$$g_\lambda = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i, \qquad \text{wobei } x^i = \varphi_\lambda^i.$$

Wähle eine Teilung der Eins $\eta_\lambda \in C^\infty(M)$, $0 \leq \eta_\lambda \leq 1$, mit $\operatorname{spt} \eta_\lambda \subset U_\lambda$, und setze

$$g = \sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda \, g_\lambda.$$

Dann ist $g \in C^\infty(T^{2,0}M)$ symmetrisch, und es gilt für $X \in TM$, mit $p = \pi(X)$,

$$g(X,X) = \sum_{\lambda \in \Lambda : p \in U_\lambda} \underbrace{\eta_\lambda(p)}_{\geq 0} \, \underbrace{g_\lambda(p)(X,X)}_{>0} \geq 0.$$

Es ist $\eta_\lambda(p) > 0$ für wenigstens ein $\lambda$, daraus folgt die strikte Ungleichung. $\square$

**Definition 8.2** *Sei $(N,h)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ eine Immersion, also* $\operatorname{rang} Df = \dim M$ *und insbesondere* $\dim M \leq \dim N$.

(a) *Dann ist $g(X,Y) = h(Df \cdot X, Df \cdot Y)$ eine Riemannsche Metrik auf $M$, sie heißt Pullback von $h$ unter $f$ (Bezeichnung: $g = f^*h$).*

(b) *Ist $g$ gegebene Riemannsche Metrilk auf $M$ und ist $g = f^*h$, so heißt $f : (M,g) \to (N,h)$ isoimetrische Immersion.*

(c) *Ein Diffeomorphismus $f : (M,g) \to (N,h)$ mit $g = f^*h$ heißt Isometrie.*

Die Klassifikation Riemannscher Mannigfaltigkeiten ist, im Vergleich zur Klassifikation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, ein viel umfangreicheres Problem, denn es gibt auf einer differenzierbaren Mannifaltigkeiten viele Metriken, die nicht isometrisch sind. Trotzdem können Riemannsche Metriken helfen, wenn es um die differenzierbare Klassifikation geht. Die Idee ist, dass gewisse Normalformen von Metriken konstruiert werden, etwa Metriken konstanter Krümmung. Das war jedenfalls für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten sehr erfolgreich, und ist grundsätzlich auch der Ansatz für 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Wir kommen jetzt zu einem weiteren Aspekt, nämlich der Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit als metrischer Raum. Sei $c : [a,b] \to M$ eine stückweise $C^1$-Kurve, das heißt $c \in C^0([a,b],M)$ und es gibt eine Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_N \leq b$, so dass $c$ auf jedem Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq N$, von der Klasse $C^1$ ist. Insbesondere existieren in den $t_i$ die einseitigen Ableitungen, sie müssen aber nicht übereinstimmen. Wir bezeichnen den Raum dieser Kurven mit $PC^1([a,b],M)$.

**Definition 8.3 (Bogenlänge und Abstand)** *Sei $(M,g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Länge einer Kurve $c \in PC^1([a,b],M)$ ist*

$$L_g(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_g \, dt = \int_a^b \sqrt{g(c(t))\big(c'(t), c'(t)\big)} \, dt. \tag{8.10}$$

*Der Riemannsche Abstand von zwei Punkten $p, q \in M$ ist*

$$d(p,q) = \inf \big\{ L_g(c) : c \in PC^1([0,1], M),\, c(0) = p,\, c(1) = q \big\}. \tag{8.11}$$

**Beispiel 8.1** Im $\mathbb{R}^n$ gilt $d(p,q) = |q-p|$. Die Abschätzung nach oben ist einfach, mit $c(t) = (1-t)p + tq$, $t \in [0,1]$, gilt

$$d(p,q) \leq L(c) = \int_0^1 |c'(t)|\, dt = |q-p|.$$

Zur Abschätzung nach unten betrachten wir die Funktion $r(x) = |x-p|$. Es gilt

$$\operatorname{grad} r(x) = \frac{x-p}{|x-p|}, \text{ insbesondere } |\operatorname{grad} r(x)| = 1, \qquad \text{für } x \neq p.$$

Wir haben ein technisches Problem bei $x = 0$, wo die Funktion $r(x)$ nicht differenzierbar ist. Deshalb sei zunächst $c$ Verbindungeskurve auf $[0,1]$ mit $c(t) \neq p$ für $t \in (0,1]$. Für $\tau > 0$ folgt dann mit Cauchy-Schwarz, Kettenregel und Hauptsatz

$$\int_\tau^1 |c'(t)|\, dt \geq \int_\tau^1 \langle \operatorname{grad} r(c(t)), c'(t) \rangle\, dt = \int_\tau^1 \frac{d}{dt} r(c(t))\, dt = r(q) - r(c(\tau)) = |q-p| - |c(\tau)-p|.$$

Mit $\tau \searrow 0$ folgt $L(c) \geq |q-p|$. Ist $c$ beliebig, so wählen wir $t \in [0,1]$ maximal mit $c(t) = p$. Die Abschätzung gilt dann auf $[t,1]$, also erst recht für ganz $c$.

**Beispiel 8.2** In $M = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gilt ebenfalls $d(p,q) = |p-q|$. Die untere Schranke ist klar, und für $p, q \in M$ können wir wieder die Strecke als Verbindungskurve wählen, es sei denn der Nullpunkt liegt auf der Strecke. In diesem Fall können wir aber den Nullpunkt umgehen, indem wir ein kleines Stück durch einen Halbkreis ersetzen. Wir erhalten so eine Folge von Kurven, deren Länge gegen $|p-q|$ konvergiert. Man kann sich überlegen, dass das Infimum $|p-q|$ in diesem Fall nicht angenommen wird.

Für das nächste Beispiel brauchen wir eine Tatsache für Untermannigfaltigkeiten $M$ des $\mathbb{R}^n$. Diese sind Riemannsche Mannigfaltigkeiten, die Metrik ist die Standardmetrik eingeschränkt auf $TM$. Sei $x \in M$ und $f \in C^1(U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $x$. Dann gilt

$$\operatorname{grad}_M f(x) = \operatorname{grad} f(x)^\top. \tag{8.12}$$

Links steht der Riemannsche Gradient, rechts der Euklidische Gradient orthogonal projiziert auf $T_xM$. Die Formel folgt direkt aus der Definition in Lemma 8.1, denn für $v \in T_xM$ ist

$$\langle \operatorname{grad} f(x)^\top, v \rangle = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle = df(x)v.$$

**Beispiel 8.3** In $\mathbb{S}^n$, versehen mit der induzierten Euklidischen Metrik, gilt

$$d(p,q) = \arccos\langle p, q \rangle \in [0, \pi].$$

Für die Abschätzung nach unten betrachten wir $r(x) = \arccos\langle p, x \rangle$. Es gilt für $x \neq \pm p$

$$\operatorname{grad}_{\mathbb{S}^n} r(x) = \operatorname{grad} r(x)^\top = -\frac{p^\top}{\sqrt{1 - \langle p, x \rangle^2}} = -\frac{p - \langle p, x \rangle x}{\sqrt{1 - \langle p, x \rangle^2}}.$$

Insbesondere ist $|\mathrm{grad}_{\mathbb{S}^n} r(x)| = 1$ für $x \neq \pm p$. Sei nun $c$ Kurve von $p$ nach $q$. Wir nehmen zunächst an dass $c(t) \neq \pm p$ für $t \in (0,1)$. Dann schätzen wir für $\tau > 0$ wieder mit Cauchy-Schwarz, Kettenregel und Hauptsatz ab:

$$\begin{aligned}\int_\tau^{1-\tau} |c'(t)|\,dt &\geq \int_\tau^{1-\tau} \langle \mathrm{grad}_{\mathbb{S}^n} r(c(t)), c'(t)\rangle\,dt\\ &= \int_\tau^{1-\tau} \frac{d}{dt} r(c(t))\,dt\\ &= \arccos\langle p, c(1-\tau)\rangle - \arccos\langle p, c(\tau)\rangle.\end{aligned}$$

Mit $\tau \searrow 0$ folgt $L(c) \geq \arccos\langle p, q\rangle$. Für $c$ beliebig wähle $t_1 \in [0,1]$ maximal mit $c(t_1) = p$. Ist dann $c(t) \neq -p$ für $t \in (t_1, 1)$, so haben wir die Abschätzung auf $[t_1, 1]$ und damit für ganz $c$. Andernfalls sei $t_2 \in [t_1, 1]$ minimal mit $c(t_1) = -p$. Dann folgt $L(c|_{[t_1,t_2]}) \geq \arccos(-1) = \pi$.

Für die Abschätzung nach oben müssen wir wieder die kürzeste Verbindung angeben. Im Fall $q \neq \pm p$ spannen $p, q$ eine Ebene auf, diese schneidet $\mathbb{S}^n$ in einem Großkreis. Der Großkreis wird durch $p, q$ in zwei Bögen zerlegt, der kürzere von den beiden ist die gesuchte Kurve (nach entsprechender Parametrisierung). Im Fall $q = -p$ kann jede Ebene gewählt werden, die $p, -p$ enthält, die kürzeste Verbindung ist dann ein Halb-Großkreis. The details are left to the reader.

**Satz 8.4 (Riemannscher Abstand)** *Sei $(M, g)$ eine zusamenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist*

$$d(p,q) = \inf\big\{L_g(c) : c \in PC^1([a,b], M),\ c(a) = p,\ c(b) = q\big\}$$

*eine Metrik auf $M$, und die zugehörige Topologie ist gleich der gegebenen Topologie auf $M$.*

Beweis: Es ist klar, dass $d(p,q)$ nichtnegativ und symmetrisch ist, und dass die Dreiecksungleichung gilt. Es bleibt zu zeigen, dass $d(p,q) < \infty$ und $d(p,q) > 0$ für $p \neq q$.

Für die erste Aussage sei $p \in M$ fest, und $A \subset M$ sei die Menge aller $q \in M$, die mit $p$ durch eine stückweise $C^1$-Kurve verbindbar sind. Zu $q \in M$ gibt es eine Karte $\varphi : U_q \to B_1(0)$ mit $\varphi(q) = 0$. Aus $q \in A$ folgt dann $U_q \subset A$, also ist $A$ offen. Andererseits folgt aus $q \in M \backslash A$ auch $U_q \subset M \backslash A$, somit ist $M \backslash A$ auch offen. Da $p \in A$ folgt $A = M$, und hieraus $d(p,q) < \infty$.

Für die zweite Aussage wähle zu $p \in M$ eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $\varphi(p) = 0$ und $\overline{B_1(0)} \subset \varphi(U)$. Die Funktion

$$f : \overline{B_1(0)} \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R},\ f(x,v) = \Big(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) v^i v^j\Big)^{\frac{1}{2}} =: \|v\|_{g(x)},$$

ist stetig und strikt positiv. Da $\overline{B_1(0)} \times \mathbb{S}^{n-1}$ kompakt ist, gibt es $\lambda, \Lambda \in (0,\infty)$ mit

$$\lambda|v| \leq \|v\|_{g(x)} \leq \Lambda|v| \quad \text{für alle } (x,v) \in \overline{B_1(0)} \times \mathbb{R}^n. \tag{8.13}$$

Das folgt direkt für $|v| = 1$, und dann für $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig durch Skalierung. Sei $c \in PC^1([a,b], M)$ Kurve von $p$ nach $q$, und $c(t) \in \varphi^{-1}(\overline{B_1(0)})$ für $t \in [0,\tau]$. Dann gilt

$$L_g(c) \geq L_g(c|_{[0,\tau]}) = \int_0^\tau \|(\varphi\circ c)'(t)\|_{g(\varphi\circ c(t))}\,dt \geq \lambda \int_0^\tau |(\varphi\circ c)'(t)|\,dt \geq \lambda\,|\varphi(c(\tau))|.$$

Also gilt die Abschätzung

$$d(p,q) \geq \begin{cases} \lambda|\varphi(q)| & \text{falls } q \in \varphi^{-1}(B_1(0)), \\ \lambda & \text{sonst.} \end{cases} > 0.$$

Für alle $\varrho \in (0,\lambda]$ folgen die Implikationen

$$q \in \varphi^{-1}(B_{\frac{\varrho}{\Lambda}}(0)) \quad \Rightarrow \quad d(p,q) < \varrho \quad \Rightarrow \quad q \in \varphi^{-1}(B_{\frac{\varrho}{\lambda}}(0)).$$

Mengen dieses Typs erzeugen jeweils die Topologie, also stimmen die metrische und die gegebene Topologie überein. Für die erste Implikation beachte $\varrho/\Lambda \leq \varrho/\lambda \leq 1$, mit $c(t) = \varphi^{-1}(t\varphi(q))$, $t \in [0,1]$, ergibt sich nach (8.13)

$$d(p,q) \leq \int_0^1 \|(\varphi \circ c)'(t)\|_{\varphi\circ c(t)}\, dt \leq \Lambda \int_0^1 |(\varphi \circ c)'(t)|\, dt = \Lambda|\varphi(q)| < \varrho.$$

Für die zweite Imlikation argumentieren wir indirekt. Angenommen $q \notin \varphi^{-1}(B_{\varrho/\lambda}(0))$. Im Fall $q \notin \varphi^{-1}(B_1(0))$ folgt dann $d(p,q) \geq \lambda \geq \varrho$, Widerspruch. Im Fall $q \in \varphi^{-1}(B_1(0))$ ergibt sich derselbe Widerspruch, nämlich

$$d(p,q) \geq \lambda|\varphi(q)| \geq \lambda \frac{\varrho}{\lambda} = \varrho.$$

Damit ist die Implikation bewiesen. □

In Satz 2.2 haben wir die Operation einer Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit $M$ betrachtet. Ist die Operation eigentlich diskontinuierlich, so ist $M/\Gamma$ eine Mannigfaltigkeit und $\pi : M \to M/\Gamma$ eine Überlagerung. Jetzt ergänzen wir den Satz im Fall, dass die Diffeomorphismen Isometrien sind.

**Satz 8.5 (Riemannsche Überlagerung)** *Sei $(M,g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, auf der die Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(g)$ eigentlich diskontinuierlich operiert. Dann gibt es auf $M/\Gamma$ genau eine Riemannsche Metrik $\overline{g}$, so dass $\pi : (M,g) \to (M/\Gamma, \overline{g})$ isometrisch ist.*

Beweis: Die Projektion $\pi : (M,g) \to (M/\Gamma, \overline{g})$ ist genau dann isometrisch, wenn für alle $x \in M/\Gamma$ und alle $p \in M$ mit $\pi(p) = x$ gilt:

$$\overline{g}(x)(X_1,X_2) = g(p)(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2) \quad \text{falls } D\pi(p)\tilde{X}_i = X_i \text{ für } i = 1,2. \tag{8.14}$$

Insbesondere ist $\overline{g}$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt wähle zu $x \in M/\Gamma$ ein $p \in M$ mit $\pi(p) = x$, und definiere $\overline{g}(x)$ durch (8.14). Das Ergebnis hängt nicht von der Wahl von $p$ ab: zu $q \in M$ mit $\pi(q) = x$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(p) = q$, und es gilt

$$D\pi(q)D\gamma(p)\tilde{X}_i = D(\pi \circ \gamma)(p)\tilde{X}_i = D\pi(p)\tilde{X}_i = X_i.$$

Ist nun $D\pi(q)\tilde{Y}_i = X_i$, so folgt $\tilde{Y}_i = D\gamma(p)\tilde{X}_i$ und weiter $g(q)(\tilde{Y}_1,\tilde{Y}_2) = g(p)(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2)$, da $\gamma$ eine Isometrie ist. Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{g}$ glatt ist. Nach Satz 2.2 gibt es zu $p \in M$ eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$, so dass $\pi|_U : U \to \pi(U)$ diffeomorph ist. Es folgt

$$\pi^*\overline{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \overline{g} \circ \pi \left(D\pi \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}, D\pi \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ij} \in C^\infty(U).$$

□

# 9 Kovariante Ableitungen

In diesem Kapitel führen wir den Begriff der kovarianten Ableitung in einem Vektorbündel ein. Für eine vektorwertige $C^1$-Funktion $\xi : M \to \mathbb{R}^k$ kennen wir die übliche Ableitung

$$D\xi \in C^0(T^*M \otimes \mathbb{R}^k),\ D\xi = \sum_{i=1}^k d\xi^i \otimes e_i.$$

Der Operator $D : C^1(M, \mathbb{R}^k) \to C^0(T^*M \otimes \mathbb{R}^k)$ ist linear in $\xi$, und es gilt

$$D(f\xi) = \sum_{i=1}^k d(f\xi^i) \otimes e_i = df \otimes \xi + f\, D\xi \quad \text{für } f \in C^1(M).$$

Sei nun $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang $k$. Für einen $C^1$-Schnitt $\xi : M \to E$, also $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$, könnten wir auch die übliche Ableitung $D\xi$ betrachten. Diese bildet aber nach $TE$ ab, mehrfache Ableitungen würden auf komplizierte Bündel führen. Außerdem enthält $D\xi$ überflüssige Information, denn es gilt ja $D\pi(\xi(p))D\xi(p) = D(\pi \circ \xi)(p) = \mathrm{Id}_{T_pM}$.

**Definition 9.1** *Eine kovariante Ableitung auf dem Vektorbündel $E$ über $M$ ist eine lineare Abbildung $\nabla : C^1(E) \to C^0(T^*M \otimes E)$, die folgende Produktregel erfüllt:*

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\, \nabla\xi \quad \textit{für alle } f \in C^1(M),\ \xi \in C^1(E). \tag{9.15}$$

In diesem Kapitel sagen wir statt *Schnitt* auch *Feld*, was in der Physik üblicher ist. Wir wollen als erstes eine lokale Darstellung für $\nabla\xi$ herleiten.

**Lemma 9.1** *Sei $\nabla$ kovariante Ableitung auf dem Vektorbündel $E$ über $M$, und $U \subset M$ sei offen. Dann gibt es genau eine kovariante Ableitung $\nabla^U$ auf $E|_U$ mit*

$$\nabla^U(\xi|_U) = (\nabla\xi)|_U \quad \textit{für alle } \xi \in C^1(E).$$

*Beweis.*
**Schritt 1:** *Lokalisierung*
Ist $\xi \in C^1(E)$ mit $\xi = 0$ auf $U$, so folgt $\nabla\xi = 0$ auf $U$. Denn zu $p \in U$ wähle $\varphi \in C^1(M)$ mit $\varphi = 1$ nahe $p$ und $\varphi = 0$ auf $M \backslash U$. Dann ist $\varphi\xi = 0$, und mit $\nabla$ linear folgt

$$0 = \nabla(\varphi\xi) = d\varphi \otimes \xi + \varphi\nabla\xi.$$

Wegen $\varphi(p) = 1$, $d\varphi(p) = 0$ folgt $\nabla\xi(p) = 0$.

**Schritt 2.** *Eindeutigkeit*
Sei $\nabla^U$ wie behauptet, und $\xi \in C^1(E|_U)$ gegeben. Zu $p \in U$ wähle $\tilde{\xi} \in C^1(E)$ mit $\tilde{\xi} = \xi$ nahe $p$. Aus Schritt 1, angewandt auf $U$ statt $M$, folgt

$$\nabla^U\xi(p) = \nabla^U(\tilde{\xi}|_U)(p) = \nabla\tilde{\xi}(p). \tag{9.16}$$

**Schritt 3.** *Existenz*
Wir definieren $\nabla^U\xi(p)$ durch (9.16). Nach Schritt 1 hängt die Definition nicht von der Wahl von $\tilde{\xi}$ ab. Ist $\tilde{\eta} \in C^1(E)$ zu $\eta \in\in C^1(E|_U)$ analog gewählt, so folgt für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\nabla^U(\lambda\xi + \mu\eta)(p) = \nabla\big(\lambda\tilde{\xi} + \mu\tilde{\eta}\big)(p) = \lambda\nabla\tilde{\xi}(p) + \mu\nabla\tilde{\eta}(p) = \lambda\nabla^U\xi(p) + \mu\nabla^U\eta(p).$$

Zu $\varphi \in C^1(U)$ wähle $\tilde{\varphi} \in C^1(M)$ mit $\tilde{\varphi} = \varphi$ nahe $p$, und berechne weiter

$$\nabla^U(\varphi\xi)(p) = \nabla(\tilde{\varphi}\tilde{\xi})(p) = d\tilde{\varphi}(p) \otimes \tilde{\xi}(p) + \tilde{\varphi}(p)\nabla\tilde{\xi}(p) = d\varphi(p) \otimes \xi(p) + \varphi(p)\nabla^U\xi(p).$$

Somit ist $\nabla^U$ die gesuchte kovariante Ableitung. $\square$

Der Einfachheit halber schreiben wir $\nabla$ statt $\nabla^U$. Sei nun $\phi : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^k$ eine lokale Trivialisierung, mit Basisfeldern

$$v_i \in C^\infty(E|_V),\ v_i(p) = \phi^{-1}(p, e_i) \quad \text{für } i = 1, \ldots, k.$$

In der Basis $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ ist $\nabla$ durch die Zusammenhangsform $A \in C^0(T^*V \otimes \mathbb{R}^{k\times k})$ gegeben, das ist also eine 1-Form mit Werten in $\mathbb{R}^{k\times k}$. Und zwar definieren wir auf $V$

$$\nabla_X v_j = \sum_{i=1}^k A^i_j(X)\, v_i \quad \text{für } X \in C^0(TM|_V) \text{ und } j = 1, \ldots, k. \tag{9.17}$$

Für ein Feld $\xi \in C^1(E)$ folgt dann auf $V$ mit (9.16)

$$(\nabla_X\xi)|_V = \nabla_X\Big(\sum_{j=1}^k \xi^j v_j\Big) = \sum_{i=1}^k \big(d\xi^i(X) + \sum_{j=1}^k A^i_j(X)\xi^j\big)\, v_i.$$

Sei $\xi_{\mathcal{A}}$ der Koordinatenvektor von $\xi$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$. Dann lautet die Formel

$$(\nabla\xi)_{\mathcal{A}} = d\xi_{\mathcal{A}} + A\,\xi_{\mathcal{A}}, \quad \text{oder kurz } \nabla = d + A. \tag{9.18}$$

Sei jetzt $\psi : \pi^{-1}(W) \to W \times \mathbb{R}^k$ eine andere Trivialisierung, mit Basis $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_k\}$ auf $W$, also $w_j \in C^1(E|_W)$, $w_j(p) = \psi^{-1}(p, e_j)$. Setze

$$S = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} : V \cap W \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}),\ w_j = \sum_{i=1}^k S^i_j\, v_i.$$

$S$ ist die Matrix der Übergangsfunktion zwischen $\phi$ und $\psi$, es gilt

$$\phi \circ \psi^{-1}(p, e_j) = \phi(p, w_j) = \sum_{i=1}^k S^i_j\, \phi(p, v_i) = \sum_{i=1}^k S^i_j\, e_i.$$

Für die Koordinatenvektoren $\xi_{\mathcal{A}}$ und $\xi_{\mathcal{B}}$ gilt

$$\xi = \sum_{j=1}^k \xi^j_{\mathcal{B}}\, w_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k S^i_j\, \xi^j_{\mathcal{B}}\, v_i, \quad \text{also } \xi_{\mathcal{A}} = S\xi_{\mathcal{B}}.$$

Für die Koordinatendarstellung $(\nabla\xi)_{\mathcal{A}}$ ergibt sich die Relation

$$\begin{aligned}
(\nabla\xi)_{\mathcal{A}} &= d\xi_{\mathcal{A}} + A\xi_{\mathcal{A}} \\
&= d(S\xi_{\mathcal{B}}) + AS\xi_{\mathcal{B}} \\
&= S\, d\xi_{\mathcal{B}} + (dS)\, \xi_{\mathcal{B}} + AS\xi_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist $(\nabla\xi)_{\mathcal{A}} = S\,(\nabla\xi)_{\mathcal{B}} = S\,\big(d\xi_{\mathcal{B}} + B\,\xi_{\mathcal{B}}\big)$. Durch Vergleich ergibt sich, wenn wir noch $T = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = S^{-1}$ setzen,

$$B = S^{-1}AS + S^{-1}dS = TAT^{-1} - (dT)T^{-1}. \tag{9.19}$$

Beachte dabei $0 = d(ST) = (dS)T + S(dT) = S(S^{-1}dS + (dT)T^{-1})T$.

Sei $G \subset \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ eine Untergruppe. Man sagt, die Strukturgruppe des Bündels $E$ ist nach $G$ reduzierbar, wenn es einen Bündelatlas gibt mit Übergangsfunktionen in $G$.

**Lemma 9.2** *Jedes Vektorbündel $E$ vom Rang $k$ über $M$ besitzt eine Riemannsche Metrik. Insbesondere ist die Strukturgruppe immer nach $\mathbb{O}(k)$ reduzierbar.*

Beweis: Sei $\phi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times \mathbb{R}^k$. Definiere auf $U_\lambda$ die Riemannsche Metrik

$$g_\lambda(p)(v,w) = \langle \phi_\lambda(p,v), \phi_\lambda(p,w)\rangle_{\mathbb{R}^k}.$$

Überdecke $M$ mit Gebieten $U_\lambda$ und verwende eine untergeordnete Teilung der Eins. Mittels Gram-Schmidt kann jede lokale Basis in eine Orthonormalbasis überführt werden, daraus folgt die zweite Aussage. □

**Definition 9.2 (metrischer Zusammenhang)** *Sei $g$ Riemannsche Metrik auf dem Vektorbündel $E$. Eine kovariante Ableitung auf $E$ heißt metrisch, wenn gilt:*

$$d[g(v,w)] = g(\nabla v, w) + g(v, \nabla w) \quad \text{für alle } v, w \in C^1(E).$$

**Lemma 9.3** *Sei $g$ Riemannsche Metrik und $\nabla$ Zusammenhang auf $E$. Dann gilt:*

(1) *Ist $\nabla$ metrisch, so gilt $A + A^{\mathrm{T}} = 0$ für jede Orthonormalbasis $\mathcal{E}$.*

(2) *Ist $\mathcal{E}$ Orthonormalbasis auf $U$ mit $A + A^{\mathrm{T}} = 0$, so ist $\nabla$ metrisch auf $E|_U$.*

Beweis: Bezüglich einer Orthonormalbasis $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$ gilt

$$d\,[g(e_i,e_j)] = 0 \quad \text{und} \quad g(\nabla e_i, e_j) + g(e_i, \nabla e_j) = A_i^j + A_j^i.$$

Ist $\nabla$ metrisch so folgt direkt $A + A^{\mathrm{T}} = 0$. Umgekehrt gilt, da $A$ schiefsymmetrisch,

$$\begin{aligned} g(\nabla v, w) + g(v, \nabla w) &= \langle dv_{\mathcal{E}} + Av_{\mathcal{E}}, w_{\mathcal{E}}\rangle_{\mathbb{R}^k} + \langle v_{\mathcal{E}}, dw_{\mathcal{E}} + Aw_{\mathcal{E}}\rangle_{\mathbb{R}^k} \\ &= d\,\langle v_{\mathcal{E}}, w_{\mathcal{E}}\rangle_{\mathbb{R}^k} \\ &= d\,[g(v,w)]. \end{aligned}$$

□

**Lemma 9.4** *Die Strukturgruppe eines Vektorbündels $E$ vom Rang $k$ über $M$ ist genau dann nach $\mathbb{S}O(k)$ reduzierbar, wenn das Bündel orientierbar ist.*

Beweis: Es gebe einen Bündelatlas mit Übergangsfunktionen in $\mathbb{S}O(k)$. Für zugehörige lokale Trivialisierung definieren wir eine Orientierung durch die Basis $\phi^{-1}(e_j)$, $1 \le j \le k$. Das liefert eine wohldefinierte Orientierung. Ist umgekehrt eine Orientierung gegeben, so definiere diesbezüglich positiv orientierte Karten (ggf. durch Verkettung mit einer Spiegelung). □

**Satz 9.1 (Raum der Zusammenhänge)** *Auf jedem Vektorbündel $\pi : E \to M$ existiert eine kovariante Ableitung. Ist $\nabla_0$ eine feste kovariante Ableitung, so ist die Menge aller kovarianten Ableitungen gegeben durch*

$$\nabla = \nabla_0 + \Omega \quad \text{mit } \Omega \in C^0\big(T^*M \otimes \mathrm{End}(E)\big).$$

Beweis: Wähle lokale Trivialisierungen $\phi_\lambda : \pi^{-1}(V_\lambda) \to V_\lambda \times \mathbb{R}^k$, $\lambda \in \Lambda$, so dass $M$ durch die $V_\lambda$ überdeckt wird. Seien $v_{\lambda,i}$ die Basisfelder von $\phi_\lambda$, und betrachte auf $E|_{V_\lambda}$

$$\nabla_\lambda \xi = \sum_{i=1}^k d\xi_\lambda^i \otimes v_{\lambda,i}.$$

Wähle eine untergeordnete Teilung der Eins $\eta_\lambda$ und setze

$$\nabla \xi = \sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda \nabla_\lambda \xi.$$

Dann ist $\nabla : C^1(E) \to C^0(T^*M \otimes E)$ wohldefiniert und linear. Da $\nabla_\lambda$ eine kovariante Ableitung auf $E|_{V_\lambda}$ ist, gilt für $f \in C^1(M)$

$$\nabla(f\xi) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda \nabla_\lambda (f\xi) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda \big(df \otimes \xi + f\, \nabla_\lambda \xi\big) = df \otimes \xi + f\, \nabla \xi.$$

Damit ist die Existenz einer kovarianten Ableitung gezeigt. Seien nun $\nabla$ und $\nabla_0$ zwei kovariante Ableitungen. Bezüglich einer lokalen Basis $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ auf $U$ haben $\nabla, \nabla_0$ Darstellungen $d + A$ bzw. $d + A_0$. Damit erhalten wir auf $U$

$$(\nabla - \nabla_0)_{\mathcal{A}} = A - A_0 \in C^0(T^*U \otimes \mathbb{R}^{k \times k}).$$

Die rechte Seite ist die Matrixdarstellung einer 1-Form auf $U$ mit Werten in $\mathrm{End}(E)$. Da $\nabla - \nabla_0$ nicht von der Trivialisierung abhängt, ist $\Omega$ global wohldefiniert. □

**Bemerkung 9.1** Hat $E$ eine Riemannsche Metrik, so gibt es einen metrischen Zusammenhang. Wir können dazu annehmen, dass die Basen $\mathcal{A}_\lambda$ der Trivialisierungen orthonormal sind. Nach Definition hat $\nabla_\lambda$ bezüglich $\mathcal{A}_\lambda$ die Zusammenhangsform Null, und ist damit metrisch auf $E|_{V_\lambda}$ nach Lemma 9.3(2). An der Definition von $\nabla\xi$ sind lokal nur endlich viele $\nabla_\lambda$ beteiligt. Nach Lemma 9.3(1) hat jeder dieser Zusammenhänge bezüglich einer fest gewählten Orthonormalbasis eine schiefsymmetrische Zusammenhangsform, also auch $\nabla$. Nach Lemma 9.3(2) ist $\nabla$ dann ein metrischer Zusammenhang.

Sei $\nabla$ gegebener Zusammenhang auf $E$. Wir definieren jetzt die kovariante Ableitung eines Feldes $\xi \in C^1([a,b], E)$ längs $c \in C^1([a,b], M)$, also $\pi \circ \xi = c$. Man nennt $c$ die Fußpunktkurve von $\xi$. Wir nehmen zuerst an dass $c(t) \in V$ für alle $t \in [a,b]$, wobei auf $V$ eine Basis $\mathcal{A}$ existiert. Dann setzen wir

$$\Big(\frac{\nabla \xi}{dt}\Big)_{\mathcal{A}} = \frac{d\xi_{\mathcal{A}}}{dt} + (A \circ c)(c')\, \xi_{\mathcal{A}}. \tag{9.20}$$

Die Fußpunktkurve $c(t)$ wird oft als implizit betrachtet, man schreibt also nur $A(c')\xi_{\mathcal{A}}$; Unklarheiten sind dabei möglich. Wir zeigen jetzt, dass die Definition nicht von der Basis abhängt. Sei auch $c(t) \in W$ für alle $t \in [a,b]$, und auf $W$ gebe es eine lokale Basis $\mathcal{B}$. Es gilt dann $\xi_{\mathcal{A}}(t) = S(c(t))\xi_{\mathcal{B}}(t)$ mit $S = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$. Es folgt für die Zusammenhangsformen $A, B$

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_{\mathcal{A}}}{dt} + A(c')\,\xi_{\mathcal{A}} &= \frac{d((S\circ c)\xi_{\mathcal{B}})}{dt} + A(c')(S\circ c)\xi_{\mathcal{B}} \\
&= (S\circ c)\Big(\frac{d\xi_{\mathcal{B}}}{dt} + (S\circ c)^{-1} dS(c')\,\xi_{\mathcal{B}} + (S\circ c)^{-1} A(c')(S\circ c)\,\xi_{\mathcal{B}}\Big) \\
&= (S\circ c)\Big(\frac{d\xi_{\mathcal{B}}}{dt} + B(c')\,\xi_{\mathcal{B}}\Big).
\end{aligned}$$

Somit gilt $(\frac{\nabla\xi}{dt})_{\mathcal{A}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}\,(\frac{\nabla\xi}{dt})_{\mathcal{B}}$, das heißt $\frac{\nabla\xi}{dt}$ ist unabhängig von der Wahl der Basis definiert.

**Lemma 9.5** *Die kovariante Ableitung $\frac{\nabla\xi}{dt}$ ist wohldefiniert und hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Linearität: für $C^1$-Felder $\xi, \eta$ längs $c$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\frac{\nabla(\lambda\xi + \mu\eta)}{dt} = \lambda\,\frac{\nabla\xi}{dt} + \mu\,\frac{\nabla\eta}{dt}. \tag{9.21}$$

(b) *Produktregel: für ein $C^1$-Feld $\xi$ längs $c$ auf $[a,b]$ und $f \in C^1([a,b])$ gilt*

$$\frac{\nabla(f\xi)}{dt} = \frac{df}{dt}\,\xi + f\,\frac{\nabla\xi}{dt}. \tag{9.22}$$

(c) *Ist $\nabla$ metrisch bezüglich $g$, so gilt für $C^1$-Felder $\xi, \eta$ längs $c$*

$$\frac{d}{dt}\,g(\xi,\eta) = g\Big(\frac{\nabla\xi}{dt}, \eta\Big) + g\Big(\xi, \frac{\nabla\eta}{dt}\Big). \tag{9.23}$$

Beweis: Dies geschieht durch Nachrechnen in einer lokalen Basis, für (c) in einer orthonormalen lokalen Basis. $\square$

**Definition 9.3 (paralleles Feld)** *Sei $\nabla$ kovariante Ableitung auf dem Vektorbündel $E$. Ein Feld $\xi \in C^1([a,b], E)$ heißt parallel (längs $c = \pi\circ\xi$), falls gilt:*

$$\frac{\nabla\xi}{dt} = 0 \qquad \text{auf } [a,b]. \tag{9.24}$$

Für Felder $\xi(t) = (c(t), v(t)) \in M \times \mathbb{R}^k$ haben wir die übliche Ableitung

$$\frac{\nabla\xi}{dt}(t) = \big(c(t), \frac{dv}{dt}(t)\big).$$

Das Feld $\xi$ ist parallel längs $c$, wenn $\frac{dv}{dt} = 0$ ist, also $v(t)$ konstant. Wir können uns vorstellen, dass sich $v(t)$ durch Parallelverschiebung längs der Kurve $c(t)$ ergibt. Der Begriff des parallelen (oder kovariant konstanten) Felds im Vektorbündel $E$ verallgemeinert die Situation. Bezüglich einer lokalen Basis $\mathcal{A}$ sieht die Bedingung wie folgt aus:

$$\Big(\frac{\nabla\xi}{dt}\Big)_{\mathcal{A}} = \frac{d\xi_{\mathcal{A}}}{dt} + A(c')\,\xi_{\mathcal{A}} = 0. \tag{9.25}$$

Es handelt sich um ein lineares, homogenes System von $k$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktion $\xi_{\mathcal{A}} : I \to \mathbb{R}^k$.

**Lemma 9.6 (parallele Felder)** *Sei $\pi : E \to M$ Vektorbündel mit kovarianter Ableitung $\nabla$, und $c \in C^1([a,b],M)$ gegeben mit $c(t_0) = x_0$. Dann gibt es zu jedem $v \in E_{x_0}$ genau ein paralleles Feld $\xi_v \in C^1([a,b],E)$ längs $c$ mit $\xi_v(t_0) = v$. Die Abbildung $v \mapsto \xi_v$ ist ein Vektorraumisomorphismus.*

Beweis: Sei zunächst $c : [a,b] \to V$, wobei auf $V$ eine Basis $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ existiert. Die Funktion $(A \circ c)c'$ ist stetig auf $[a,b]$. Die Lösungstheorie für lineare Systeme besagt, dass (9.25) zu gegebenem Anfangswert eine eindeutige Lösung auf dem ganzen Intervall $[a,b]$ hat. Genauer gilt die lokale Lösbarkeit nach Picard-Lindelöf, und die Existenz auf ganz $[a,b]$ verwendet eine Wachstumsschranke nach dem Lemma von Gronwall. Im allgemeinen wähle eine Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$, so dass $c([t_{i-1}, t_i])$ im Bereich einer lokalen Basis liegt, und konstruiere stückweise die Lösung. $\square$

**Definition 9.4 (Parallelverschiebung)** *Sei $\pi : E \to M$ Vektorbündel mit kovarianter Ableitung $\nabla$. Für eine Kurve $c \in C^1([a,b],M)$ definieren wir den Vektorraumisomorphismus*

$$P_c : E_{c(a)} \to E_{c(b)},\ P_c(v) = \xi_v(b), \qquad \textit{wobei } \xi_v \textit{ parallel längs } c \textit{ mit } \xi_v(a) = v.$$

Hierzu drei Bemerkungen.

- Sei $\nabla$ metrisch bezüglich $g$. Dann gilt für parallele Felder $\xi, \eta$ längs $c$
$$\frac{d}{dt}\, g(\xi,\eta) = g\Big(\frac{\nabla\xi}{dt}, \eta\Big) + g\Big(\xi, \frac{\nabla\eta}{dt}\Big) = 0.$$
Also ist die Parallelverschiebung eine Isometrie, denn
$$g(P_c v, P_c w) = g(\xi_v(b), \xi_w(b)) = g(\xi_v(a), \xi_w(a)) = g(v,w).$$

- Ist $E$ orientiertes Vektorbündel, so ist $P_c$ orientierungstreu. Sei erst $c : [a,b] \to V$, wobei auf $V$ eine positiv orientierte Basis $\mathcal{A}$ existiert. Sei $P\mathcal{A}(t)$ die Parallelverschiebung von $\mathcal{A}(c(a))$ längs $c(t)$. Nach dem Zwischenwertsatz hat die Transformationsmatrix zwischen $P\mathcal{A}(t)$ und $\mathcal{A}(c(t))$ immer positive Determinante, also erhält die Parallelverschiebung die Orientierung. Für $c$ beliebig verwende das stückweise auf den Intervallen einer Unterteilung von $[a,b]$.

- Die Parallelverschiebung ändert sich nicht bei Umparametrisierung von $c$. Denn sei $t = \varphi(s)$ mit $s \in [\alpha, \beta]$. Dann ist $\tilde{\xi}(s) = \xi(\varphi(s))$ ein Feld längs $\tilde{c}(s) = c(\varphi(s))$, und in einer lokalen Basis gilt
$$\begin{aligned}
\frac{\nabla\tilde{\xi}}{ds}(s) &= \frac{d\tilde{\xi}}{ds}(s) + A(\tilde{c}(s))(\tilde{c}'(s))\,\tilde{\xi}(s)\\
&= \frac{d\xi}{dt}\,(\varphi(s))\varphi'(s) + (A(c(t))(c'(t))\,\xi(t)|_{t=\varphi(s)}\,\varphi'(s)\\
&= \frac{\nabla\xi}{dt}(\varphi(s))\,\varphi'(s).
\end{aligned}$$
Ist $\xi(t)$ parallel längs $c(t)$, so ist $\tilde{\xi}(s) = \xi(\varphi(s))$ parallel längs $\tilde{c}(s) = c(\varphi(s))$. Insbesondere gilt $P_{c\circ\varphi} = P_c$.

Im allgemeinen hängt die Parallverschiebung aber sehr wohl von der Kurve $c$ ab.

**Beispiel 9.1** Betrachte auf $T\mathbb{S}^2$ die kovariante Ableitung $\nabla X = (DX)^\top$. Offenbar ist $\nabla$ linear und für $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ gilt $\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X$. Sei $X \in C^1([a,b], T\mathbb{S}^2)$ ein Vektorfeld längs $c \in C^1([a,b], \mathbb{S}^2)$. Dann gilt

$$\frac{\nabla X}{dt} = \Big(\frac{dX}{dt}\Big)^\top.$$

Betrachte speziell einen Großkreis

$$c(t) = (\cos t)p + (\sin t)q \quad \text{ mit } |p| = |q| = 1,\ \langle p, q\rangle = 0.$$

Dann ist $v_1(t) = c'(t)$ parallel längs $c(t)$, denn es gilt $(c''(t))^\top = -(c(t))^\top = 0$. Ein zweites paralleles Feld längs $c(t)$ ist $v_2(t) = p \times q$ (Kreuzprodukt), das ist die Normale zur Ebene des Großkreises. Jedes andere parallele Feld längs $c$ ergibt sich als Linearkombination von $v_1, v_2$ mit konstanten Koeffizienten. Es ist leicht zusehen, dass zum Beispiel die Parallelverschiebung längs des Randes eines Oktanten nicht Null ist.

**Definition 9.5** *Sei $\nabla$ ein $C^1$-Zusammenhang auf dem Vektorbündel $\pi : E \to M$. Die Krümmung von $\nabla$ ist, für $X, Y \in C^1(TM)$ und $\xi \in C^1(E)$,*

$$F(X,Y)\xi = \nabla_X(\nabla_Y \xi) - \nabla_Y(\nabla_X \xi) - \nabla_{[X,Y]}\xi.$$

*Hier sind $X, Y$ Vektorfelder auf $M$ und $\xi$ ist ein Feld in $E$, genauer $F \in C^0(\Lambda^2 TM \otimes \mathrm{End}(E))$.*

Das ist natürlich ein kompliziertes Objekt, das die Differentialgeometrie seit langem beschäftigt. Wir nähern uns der Sache wie üblich, nämlich durch Übersetzung in lokale Koordinaten. In einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ von $M$ haben wir die kovarianten Ableitungen in Richtung der Koordinatenfelder, also

$$\nabla_\alpha \xi = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \xi \in C^0(E|_U).$$

Bekanntlich gilt $\big[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\big] = 0$, die Definition der Krümmung lautet dann

$$F\Big(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big)\xi = (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)\,\xi.$$

Das macht auf jeden Fall Sinn, die Krümmung misst die Abweichung bei Vertauschung der Operatoren $\nabla_\alpha$ und $\nabla_\beta$, also die Asymmetrie der zweiten kovarianten Ableitung. Wir wollen nun die Formel für die Krümmung bezüglich einer lokalen Basis von $E$ herleiten. Betrachte dazu auf $V \subset M$ zwei 1-Formen $A, B$ mit Werten in $\mathbb{R}^{k\times k}$, also lokal

$$A = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha dx^\alpha, \quad B = \sum_{\alpha=1}^n B_\alpha dx^\alpha \quad \text{ mit } A_\alpha, B_\alpha : V \to \mathbb{R}^{k\times k}.$$

Wir defineren dann

$$\begin{aligned} dA &= \sum_{\alpha,\beta=1}^n \partial_\alpha A_\beta\, dx^\alpha \wedge dx^\beta, \\ A \wedge B &= \sum_{\alpha,\beta=1}^n A_\alpha B_\beta\, dx^\alpha \wedge dx^\beta. \end{aligned}$$

Im Unterschied zu reellen 1-Formen gilt hier im allgemeinen nicht $A \wedge A = 0$, sondern

$$A \wedge A = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} [A_\alpha, A_\beta]\, dx^\alpha \wedge dx^\beta = \sum_{1 \le \alpha < \beta \le n} [A_\alpha, A_\beta]\, dx^\alpha \wedge dx^\beta,$$

wobei $[A_\alpha, A_\beta]$ der Kommutator der Matrizen ist.

**Lemma 9.7 (lokale Formel der Krümmung)** *Sei $\nabla$ kovariante Ableitung auf $E$. Dann gilt bezüglich einer lokalen Basis $\mathcal{E}$ mit Zusammenhangsform $A$*

$$F_{\mathcal{A}} = dA + A \wedge A.$$

Beweis: Wir berechnen bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ und einer lokalen Karte auf $M$

$$\begin{aligned}
\Big(F\big(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\big)\, \xi\Big)_{\mathcal{A}} &= \big(\nabla_\alpha(\nabla_\beta \xi) - \nabla_\beta(\nabla_\alpha \xi)\big)_{\mathcal{A}} \\
&= (\partial_\alpha + A_\alpha)\,(\nabla_\beta \xi)_{\mathcal{A}} - (\partial_\beta + A_\beta)\,(\nabla_\alpha \xi)_{\mathcal{A}} \\
&= (\partial_\alpha + A_\alpha)(\partial_\beta + A_\beta)\, \xi_{\mathcal{A}} - (\partial_\beta + A_\beta)(\partial_\alpha + A_\alpha)\, \xi_{\mathcal{A}} \\
&= (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\xi_{\mathcal{A}} + (A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)\xi_{\mathcal{A}} \\
&= dA\big(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\big)\, \xi_{\mathcal{A}} + A \wedge A\big(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\big)\, \xi_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

□

**Lemma 9.8 (Krümmung und Basiswechsel)** *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ lokale Basen von $E$. Dann gilt*

$$F_{\mathcal{B}} = T\, F_{\mathcal{A}}\, T^{-1} \quad \text{mit } T = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}.$$

Beweis: Es gilt für eine 1-Form $A$ und eine Funktion $B$, beide mit Werten in $\mathbb{R}^{k \times k}$,

$$\begin{aligned}
d(AB) &= \sum_{\alpha=1}^{n} dx^\alpha \wedge \partial_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} A_\beta B\, dx^\beta \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \big((\partial_\alpha A_\beta)\, B + A_\beta\, \partial_\alpha B\big)\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= (dA)\, B - A \wedge dB.
\end{aligned}$$

Bei Vertauschung von $A$ und $B$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
d(BA) &= \sum_{\alpha=1}^{n} dx^\alpha \wedge \partial_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} B A_\beta\, dx^\beta \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \big((\partial_\alpha B)\, A_\beta + B\, \partial_\alpha A_\beta\big)\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
&= dB \wedge A + B(dA).
\end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{B}} &= dB + B \wedge B \\
&= d\,(TAT^{-1} - (dT)T^{-1}) + (TAT^{-1} - (dT)T^{-1}) \wedge (TAT^{-1} - (dT)T^{-1}) \\
&= dT \wedge A\, T^{-1} + T(dA)T^{-1} - TA \wedge d(T^{-1}) + dT \wedge d(T^{-1}) \\
&\quad + T(A \wedge A)T^{-1} - TAT^{-1} \wedge (dT)T^{-1} - (dT) \wedge AT^{-1} + (dT)T^{-1} \wedge (dT)T^{-1}.
\end{aligned}$$

Verwende nun $d(TT^{-1}) = 0$, also $d(T^{-1}) = -T^{-1}(dT)T^{-1}$. Das ergibt

$$\begin{aligned} dT \wedge AT^{-1} - (dT) \wedge AT^{-1} &= 0 \\ -TA \wedge d(T^{-1}) - TAT^{-1} \wedge (dT)T^{-1} &= 0, \\ dT \wedge d(T^{-1}) + (dT)T^{-1} \wedge (dT)T^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $F_{\mathcal{B}} = T\,(dA + A \wedge A)\,T^{-1} = T\,F_{\mathcal{A}}\,T^{-1}$. □

**Satz 9.2 (Flache Zusammenhänge)** *Sei $\nabla$ Zusammenhang auf $E$. Äquivalent sind:*

(a) $\nabla$ *hat Krümmung* $F^{\nabla} = 0$.

(b) *Sind $c_0, c_1 : [a,b] \to M$ $C^2$-homotop mit festen Endpunkten, so folgt $P_{c_0} = P_{c_1}$.*

Beweis: Sei zuerst $D$ ein Zusammenhang auf dem trivialen Bündel $Q \times \mathbb{R}^k$, wobei $Q = [a,b] \times [0,1]$, und $\mathcal{B} = \{v_1(s,t), \ldots, v_k(s,t)\}$ eine Basis auf $Q$. Sei $\omega : Q \to \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{R}^{k \times k}$ die zugehörige Zusammenhangsform, also $(D\xi)_{\mathcal{B}} = d\xi_{\mathcal{B}} + \omega\xi_{\mathcal{B}}$. Wegen $(v_j)_{\mathcal{B}} = e_j$ gilt

$$\frac{Dv_j}{ds} = \omega_1 e_j,\ \frac{Dv_j}{dt} = \omega_2 e_j \quad \text{mit } \omega_1 = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big),\ \omega_2 = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big). \tag{9.26}$$

Wir wählen nun $v_j(a,0) = e_j$ und bestimmen $\mathcal{B}$ durch folgende Bedingungen:

$$\frac{Dv_j}{dt} = 0 \text{ auf } \{a\} \times [0,1], \quad \frac{Dv_j}{ds} = 0 \text{ auf } [a,b] \times [0,1].$$

Das bedeutet für die Zusammenhangsform

$$\omega_2 = 0 \text{ auf } \{a\} \times [0,1], \quad \omega_1 = 0 \text{ auf } [a,b] \times [0,1]. \tag{9.27}$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt für alle $(s,t) \in Q$

$$\omega_2(s,t) = \int_a^s \big(\partial_1\omega_2 - \partial_2\omega_1 + [\omega_1, \omega_2]\big)(\sigma,t)\,d\sigma = \int_a^s (F^D_{12})_{\mathcal{B}}(\sigma,t)\,d\sigma. \tag{9.28}$$

Sei nun $F^D = 0$. Aus (9.28) folgt $\omega_2 = 0$, das heißt $Dv_j = 0$ auf ganz $Q$. Ein Feld $\xi$ ist dann parallel längs einer Kurve in $Q$ genau wenn seine Koeffizienten bezüglich $\mathcal{B}$ konstant sind. Insbesondere ist das Ergebnis der Parallelverschiebung schon durch den Anfangswert bestimmt und hängt nicht vom Weg ab.

Sei umgekehrt die Parallelverschiebung unabhängig vom Weg. Nach Konstruktion ergibt sich $v_j(s,t)$, indem wir $v_j(s,0)$ wie folgt parallel verschieben: erst horizontal nach $(a,0)$, dann vertikal nach $(a,t)$ und schließlich horizontal nach $(s,t)$. Nach Voraussetzung liefert vertikale Parallelverschiebung von $(s,0)$ nach $(s,t)$ dann ebenfalls $v_j(s,t)$. Aus (9.26) folgt $\omega_2 = 0$ und somit $F^D_{\mathcal{B}} = d\omega + \omega \wedge \omega = 0$.

Um dieses Argument auf ein Bündel über $M$ anzuwenden, konstruieren wir einen Pullback. Wir nehmen dazu an, dass die Homotopie $c \in C^2([a,b] \times [0,1], M)$, $c = c(s,t)$, in eine offene Menge $V$ abbildet, auf der eine Basis $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ existiert. Sei $A \in C^1(T^*V \otimes \mathbb{R}^{k \times k})$ die Zusammenhangsform von $\mathcal{A}$. Definiere auf $Q \times \mathbb{R}^k$ den Zusammenhang

$$D\xi(s,t) = d\xi(s,t) + (c^*A)(s,t)\,\xi(s,t) \quad \text{für } \xi : Q \to \mathbb{R}^k.$$

Sei $\xi \in C^1(I, \mathbb{R}^k)$ ein Feld längs der Kurve $\gamma \in C^1(I, Q)$. Dann haben wir längs $\tilde{\gamma} = c \circ \gamma$ den Lift $\tilde{\xi} = \sum_{j=1}^k \xi^j \, a_j \circ \tilde{\gamma}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla \tilde{\xi}}{du} &= \sum_{j=1}^k \frac{d\xi^j}{du} \, a_j \circ \tilde{\gamma} + \sum_{i,j=1}^k \xi^j A^i_j \circ \tilde{\gamma}(\tilde{\gamma}') \, a_i \circ \tilde{\gamma} \\
&= \sum_{i=1}^k \Big( \frac{d\xi^i}{du} + \sum_{j=1}^k (c^* A^i_j) \circ \gamma(\gamma') \, \xi^j \Big) \, a_i \circ \tilde{\gamma} \\
&= \sum_{i=1}^n \Big( \frac{D\xi}{du} \Big)^i \, a_i \circ \tilde{\gamma}.
\end{aligned}$$

$\tilde{\xi}$ ist genau dann parallel längs $\tilde{\gamma}$, wenn $\xi$ parallel längs $\gamma$ ist. Liefert Parallelverschiebung rund um $\partial Q$ im Pullbackbündel die Identität, so gilt das auch längs $c$ in $E|_V$, und vice versa. Für die Krümmungen folgt, bezüglich der Standardbasis bzw. der Basis $\mathcal{A}$,

$$F^D = d(c^* A) + (c^* A) \wedge (c^* A) = c^*(dA + A \wedge A) = c^* F^\nabla_{\mathcal{A}}. \tag{9.29}$$

Aus $F^\nabla = 0$ folgt also $F^D = 0$, und damit die Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung wie in (b) behauptet, zunächst nur in $E|_V$. Umgekehrt können wir zu $p \in M$ und $v, w \in T_p M$ eine Homotopie $c(s,t)$ wählen mit $c(0,0) = p$, $\frac{\partial c}{\partial s}(0,0) = v$ und $\frac{\partial c}{\partial t}(0,0) = w$. Aus der Wegunabhängigkeit folgt dann

$$0 = F^D_{12}(a, 0) = F^\nabla_{\mathcal{A}} \Big( \frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t} \Big)|_{s,t=0} = F^\nabla_{\mathcal{A}}(p)(v, w).$$

Es bleibt $(a) \Rightarrow (b)$ zu zeigen, wenn das Bild von $c : [a,b] \times [0,1] \to M$ nicht im Bereich einer Trivialisierung liegt. Betrachte $Q_{\mu\nu} = [s_{\mu-1}, s_\mu] \times [t_{\nu-1}, t_\nu]$ für $a = s_0 < \ldots < s_M = b$ und $0 = t_0 < \ldots < t_N = 1$. Die Unterteilung sei so gewählt, dass jedes $c(Q_{\mu\nu})$ im Gebiet einer Basis liegt. Wie bewiesen ist dann die Parallelverschiebung längs jeder Masche $\partial Q_{\mu\nu}$ die Identität. Ausgehend von der Randkurve $\partial Q$ kann man durch Weglassen von Maschen zu der konstanten Kurve $c(a, 0)$ gelangen, ohne dabei den Wert der Parallelverschiebung zu ändern. Also folgt allgemein $P_{c_0} = P_{c_1}$. $\square$

Es ist naheliegend zu fragen, ob und wie die Parallelverschiebung abgeschätzt werden kann, wenn die Krümmung kontrolliert ist.

**Satz 9.3 (Abschätzung des Paralleltransports)** *Sei $(M, g)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel mit Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und metrischem Zusammenhang $\nabla$. Sei $c \in C^2(Q, M)$, $Q = [a,b] \times [0,1]$, eine Homotopie. Dann gilt für den Paralleltransport rund um $\partial Q$ die Abschätzung*

$$|P_{\partial Q} - \mathrm{Id}| \leq \Lambda e^\Lambda \quad \text{mit } \Lambda = \int_Q \|F^\nabla\|_g \, d\mu_g.$$

Beweis: Wir gehen wie im Beweis von Satz 9.2 vor. Allerdings nehmen wir an, dass $D$ metrisch ist bezüglich des Standardskalarprodukts. Die Basis $\mathcal{B}$ ist dann orthonormal, und die Zusammenhangsform $\omega$ ist schiefsymmetrisch. Wir verwenden in den Abschätzungen die

Hilbert-Schmidt Norm für Matrizen. Ist $\xi$ parallel längs $\partial Q$, so ist $\xi_{\mathcal{B}}$ konstant außer auf $b \times [0,1]$. Dort gilt

$$0 = \Big(\frac{D\xi}{dt}\Big)_{\mathcal{B}}(t) = \frac{d\xi_{\mathcal{B}}}{dt}(t) + \omega_2(b,t)\xi_{\mathcal{B}}(t).$$

Die Ungleichung von Gronwall (bzw. Integration) liefert, da $\mathcal{B}$ Orthonormalbasis,

$$|\xi(b,t)| \leq |\xi(b,0)|\, e^{\kappa} \quad \text{ mit } \kappa = \int_0^1 |\omega_2(b,s)|\, ds.$$

Rückeinsetzen in die Differentialgleichung oben ergibt

$$|\xi(b,1) - \xi(b,0)| \leq \int_0^1 |\omega_2(b,t)|\, |\xi(b,t)|\, dt \leq |\xi(b,0)|\, \kappa e^{\kappa}.$$

Nach (9.26) ist

$$\kappa = \int_0^1 \Big| \int_a^b F_{12}^D(s,t)\, ds \Big|\, dt \leq \int_0^1 \int_a^b |F_{12}^D(s,t)|\, ds\, dt.$$

Sei $J^g c$ die Jacobische von $c$ bzgl. $g$. Ist $\tau_1, \tau_2$ Orthonormalbasis von Bild $Dc(s,t)$, so gilt

$$\Big| F_{\mathcal{A}}^{\nabla}\Big(\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\Big)\Big| = |F_{\mathcal{A}}^{\nabla}(\tau_1,\tau_2)|\, J^g c.$$

Dies sieht man leicht für geeignete $\tau_1, \tau_2$. Mit $d\mu_g(s,t) = J^g c(s,t)\, ds\, dt$ folgt

$$\int_Q |F_{12}^D|\, ds\, dt = \int_Q \Big| F_{\mathcal{A}}^{\nabla}\Big(\frac{\partial c}{\partial s}, \frac{\partial c}{\partial t}\Big)\Big|\, ds\, dt \leq \int_Q \|F^{\nabla}\|_g\, d\mu_g.$$

Wir haben benutzt, dass die Hilbert-Schmidt Norm von $F_{\mathcal{A}}^{\nabla}$ nicht von der Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ abhängt. Dies beweist die Abschätzung, wenn das Bild von $c$ im Gebiet einer Trivialisierung liegt. Allgemein wählen wir wieder eine Unterteilung von $Q$ wie im Beweis von Satz 9.2. Wir haben dann für jede Masche eine Fehlerabschätzung

$$|P_{\partial Q_{\mu\nu}} - \mathrm{Id}| \leq \Lambda_{\mu\nu} e^{\Lambda_{\mu\nu}} \quad \text{ mit } \Lambda_{\mu\nu} = \int_{Q_{\mu\nu}} \|F^{\nabla}\|_g\, d\mu_g.$$

Bei sukzessive Streichung der Maschen folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|P_{\partial Q} - \mathrm{Id}| \leq \sum_{\mu,\nu} |P_{\partial Q_{\mu\nu}} - \mathrm{Id}| \leq \sum_{\mu,\nu} \Lambda_{\mu\nu} e^{\Lambda_{\mu\nu}} \leq e^{\Lambda} \sum_{\mu,\nu} \Lambda_{\mu\nu} = \Lambda e^{\Lambda}.$$

□

Wir hatten schon gesehen dass die Zusammenhänge auf einem Vektorbündel einen unendlichdimensionalen affinen Raum bilden. Im speziellen Fall des Tangentialbündels $TM$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M,g)$ gibt es aber einen ausgezeichneten Zusammenhang $D$, den Levi-Civita Zusammenhang, der durch seine Eigenschaften charakterisiert ist. Zunächst soll $D$ natürlich metrisch sein, das heißt

$$\partial_X[g(Y,Z)] = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z).$$

Dabei ist $\partial_X f = df(X)$ die Richtungsableitung. Auch die metrischen Zusammenhänge bilden einen unendlichdimensionalen affinen Raum, wie diskutiert. Als weitere Eigenschaft fordern wir nun dass $D$ symmetrisch ist, das heißt

$$D_X Y - D_Y X = [X,Y] \quad \text{ for all } X, Y \in C^{\infty}(TM). \tag{9.30}$$

In einem beliebigen Vektorbündel $E$ sind die Argumente von $\nabla_X \xi$ nicht vertauschbar, das macht nur Sinn im Spezialfall $E = TM$. Die Standard Ableitung $D_X Y = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i Y^j \, e_j$ auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt die Symmetriebedingung, siehe Satz 4.5.

**Satz 9.4 (Levi-Civita)** *Sei $M$ differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik $g$. Dann gibt es auf $TM$ genau einen Zusammenhang $D$ der metrisch und symmetrisch ist. In der Koordinatendarstellung*

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{9.31}$$

*sind seine Koeffizienten durch die Formel von Christoffel gegeben:*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \big( \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \big). \tag{9.32}$$

Beweis: . Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Aus $D$ metrisch folgt

$$\begin{aligned} \partial_X g(Y,Z) &= \quad g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \\ \partial_Y g(Z,X) &= \quad g(D_Y Z, X) + g(Z, D_Y X) \\ -\partial_Z g(X,Y) &= -g(D_Z X, Y) - g(X, D_Z Y). \end{aligned}$$

Wir addieren die Gleichungen und erhalten

$$\partial_X g(Y,Z) + \partial_Y g(Z,X) - \partial_Z g(X,Y) = g(D_X Y, Z) + g(D_Y X, Z) + g([X,Z],Y) + g([Y,Z],X).$$

Jetzt verwenden wir die Symmetrie: es ist $D_Y X = D_X Y - [X,Y]$, also folgt

$$\begin{aligned} 2g(D_X Y, Z) &= \partial_X g(Y,Z) + \partial_Y g(Z,X) - \partial_Z g(X,Y) \\ &\quad + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([[Y,Z],X). \end{aligned}$$

Die rechte Seite hängt nicht von $D$ ab, das beweist die Eindeutigkeit. Für die Existenz definieren wir $D$ in lokalen Koordinaten, und zwar mit den Koeffizienten $\Gamma_{ij}^k$ aus (9.32),

$$D_X Y = \sum_{i=1}^n X^i D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Big( \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big) = \sum_{i,j=1}^n X^i \partial_i Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

$D$ ist ein (lokaler) Zusammenhang, genauer ist der Unterschied zum trivialen Zusammenhang die matrixwertige 1-Form

$$A_j^k = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k dx^i.$$

Die Symmetrie von $D$ ist klar wegen $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Für $D$ metrisch berechnen wir

$$\begin{aligned} g\Big( D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \Big) &= \sum_{k=1}^n g_{kl} \, \Gamma_{ij}^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^n g_{kl} \, g^{km} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \end{aligned}$$

Vertauschen von $j,l$ und Addition ergibt

$$\partial_i g_{jl} = g\Big(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\Big) + g\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}, D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^l}\Big).$$

Das ist die Eigenschaft *metrisch* für Koordinatenfelder, der Fall beliebiger Vektorfelder folgt leicht durch Entwickeln in die Basis. Wir haben gezeigt, dass durch (9.32) ein lokaler Zusammenhang gegeben ist, der metrisch und symmetrisch ist. Wegen Eindeutigkeit stimmen die Definitionen auf den Overlaps der Koordinaten überein, also ist $D$ global wohldefiniert. $\square$

Christoffel's Formel (9.32) wurde hier einfach angegeben. Sie kann aber leicht hergeleitet werden, indem in dem Argument für die Eindeutgkeit Koordinatenfelder gewählt werden, also $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Z = \frac{\partial}{\partial x^l}$. Es folgt dann

$$\sum_{m=1}^n g_{ml}\,\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Multiplikation mit $g^{kl}$ and Summation über $l = 1,\ldots,n$ ergibt (9.32). Die Definition der Christoffelsymbole und der kovarianten Ableitung $D$ ist immanent in der Formel für die erste Variation der Bogenlänge, dort tritt der Term $D_{c'}c'$ als Euler-Lagrange Operator auf.

**Definition 9.6 (Riemannscher Krümmungstensor)** *Sei $g$ eine $C^2$ Riemannsche Metrik auf $M$ mit Levi-Civita Zusammenhang $D$. Der Riemannsche Krümmungstensor ist*

$$R(X,Y)Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]}Z. \tag{9.33}$$

Offensichtlich ist $R(X,Y) = -R(Y,X)$, insbesondere $R = 0$ im Fall $\dim M = 1$. Da $D$ metrischer Zusammenhang, ist außerdem $R(X,Y)(p) \in \mathrm{End}\, T_pM$ schiefsymmetrisch bezüglich der Metrik $g(p)$. In lokalen Koordinaten haben wir die Darstellung

$$R\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^{l} R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}, \qquad \text{wobei}$$

$$R^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \sum_{m=1}^n \big(\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}\big). \tag{9.34}$$

Dabei sind $\Gamma^k_{ij}$ die Christoffelsymbole, siehe (9.32).