Differentialgeometrie

Wintersemester 21/22

Prof. Dr. E. Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Gegenstand der „klassischen“ Differentialgeometrie sind Flächen (oder Kurven) $M \subset \mathbb{R}^3$. Diese können lokal durch Parametrisierungen beschrieben werden. Ab dem 19. Jahrhundert wurden Situationen betrachtet, in denen Flächen nicht eingebettet sind, also nicht in einem umgebenden Raum liegen. Beispiele:

- die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$ (J. Bolyai/N. I. Lobatschewski um 1830) D. Hilbert hat 1901 gezeigt, es gibt keine isometrische Einbettung $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

- das *Theorema egregium* von C. F. Gauß (1827) besagt, dass die Gaußkrümmung K einer Fläche invariant unter Verbiegungen ist, das heißt sie hängt nur von den Längenverhältnissen auf der Fläche ab und nicht von der Lage der Fläche im Raum. In seinem Habilitationsvortrag (1854) zum Thema *Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen* hat B. Riemann dann das Konzept eines abstrakten Raums mit Längen- und Winkelmessung entworfen; heute sprechen wir von einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die Krümmung wird dabei durch den Riemannschen Krümmungstensor beschrieben.

- Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie (um 1915) von A. Einstein ist der Begriff einer Raum-Zeit mit Längen- und Winkelmessung. Die Kopplung zwischen Materie und Geometrie der Raumzeit ist dabei durch die Einsteinschen Feldgleichungen gegeben.

- Das Problem der mehrdeutigen Lösung von algebraischen Gleichungen, wie zum Beispiel $w^2 - z = 0$, führte zur Theorie der Riemannschen Flächen. Der Begriff der Mannigfaltigkeit wurde erstmals in diesem Zusammenhang in moderner Weise formuliert, und zwar von H. Weyl in seinem Buch *Die Idee der Riemannschen Fläche* von 1913. Im Beispiel gibt es für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ lokal zwei Lösungsfunktionen, die aber nicht auf ganz $\mathbb{C}$ stetig definiert werden können. Auf einer geeigneten abstrakten Fläche kann aber $\sqrt{z}$ global definiert werden.

1 Der Begriff der Mannigfaltigkeit

Definition 1.1 *Eine Topologie auf einer Menge X ist ein Mengensystem $\mathcal{O} \subset 2^X$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,

(ii) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$, *falls* $U_\lambda \in \mathcal{O}$ *für alle* $\lambda \in \Lambda$ $\quad$ *(Λ beliebige Indexmenge),*

(iii) $\bigcap_{i=1}^N U_i \in \mathcal{O}$, *falls* $U_i \in \mathcal{O}$ *für* $i = 1, \ldots, N$ *mit* $N < \infty$.

Die Menge X mit dem System $\mathcal{O}$ heißt topologischer Raum. Mit einem Vektorraum hat das nichts zu tun, man verwendet das Wort Raum nur wegen der Anschaulichkeit. Das griechische Wort *topos* kann mit *Ort* übersetzt werden. Die offenen Mengen in X sind genau die Mengen in $\mathcal{O}$. Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \backslash A$ offen ist, also $X \backslash A \in \mathcal{O}$. Für $x \in X$ heißt jede offene Menge U mit $x \in U$ offene Umgebung von X. Allgemein ist eine Umgebung von $x \in X$ eine beliebige Menge, die eine offene Umgebung von x enthält. Die folgende Eigenschaft ist nicht in jedem topologischen Raum erfüllt, aber in dieser Vorlesung wird sie immer verlangt.

Definition 1.2 *Eine Topologie auf X heißt Hausdorffsch bzw. X heißt Hausdorffraum*, wenn je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Umgebungen U bzw. V besitzen mit $U \cap V = \emptyset$.*

Beispiel 1.1 Jeder metrische Raum (X, d) ist ein topologischer Raum, und zwar ist $U \subset X$ nach Definition offen wenn gilt:

für alle $y \in U$ gibt es ein $\varrho > 0$ mit $B_\varrho(y) \subset U$.

Dabei ist $B_\varrho(y) = \{z \in X : d(y, z) < \varrho\}$ die offene Kugel um y mit Radius $\varrho > 0$. Es gilt:

(i) $B_r(x)$ ist offen für alle $x \in X$, $r > 0$.

(ii) Jedes offene U ist Vereinigung von offenen Kugeln.

(iii) Das System aller offenen Mengen ist eine Topologie.

(iv) X ist damit ein Hausdorffraum. //

Beispiel 1.2 (Relativtopologie) Sei X ein topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{O}$. Für eine Teilmenge $M \subset X$ ist

$$\mathcal{O}_M = \{M \cap U : U \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf M, die sogenannte Relativtopologie. Die Schnitte $M \cap A$ mit A abgeschlossen in X sind dann abgeschlossen bezüglich der Relativtopologie, denn

$$M \backslash (M \cap A) = M \cap (X \backslash A) = \text{ offen bzgl. der Relativtopologie.}$$

Alle abgeschlossenen Mengen bezüglich $\mathcal{O}_M$ sind von diesem Typ, denn für $U \subset X$ offen gilt

$$M \backslash (M \cap U) = M \cap (X \backslash U), \text{ und } X \backslash U \text{ ist abgeschlossen.}$$

*Felix Hausdorff, 1868-1942

Ist die Topologie auf X Hausdorffsch, so gilt das auch für die Relativtoplogie auf M: zu $x, y \in M$, $x \neq y$, gibt es disjunkte offene Umgebungen U, V in X, und dann sind $M \cap U$, $M \cap V$ ebenfalls disjunkt.

Statt *offen (abgeschlossen) bezüglich der Relativtopologie* sagt man auch kurz *relativ offen (abgeschlossen)*. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so haben wir auf $M \subset X$ die induzierte Metrik $d_M(x, y) = d(x, y)$ $(x, y \in M)$. Die Relativtopologie ist die zugehörige Topologie.

Definition 1.3 *Ein System $\mathcal{B}$ von offenen Mengen in einem topologischen Raum X heißt Basis der Topologie, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.*

Beispiel 1.3 Sei (X, d) ein separabler metrischer Raum, das heißt es gibt eine abzählbare Teilmenge $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$, die dicht ist, zum Beispiel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dann bilden die Kugeln $B_{\frac{1}{k}}(p_i)$ mit $i, k \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Umgebungsbasis. Dazu ist zu zeigen: zu jeder Kugel $B_r(p)$ gibt es $i, k \in \mathbb{N}$ mit $p \in B_{\frac{1}{k}}(p_i)$ und $B_{\frac{1}{k}}(p_i) \subset B_r(p)$, bzw.

$$d(p, p_i) < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad d(p, p_i) + \frac{1}{k} \leq r.$$

Wir wählen erst k mit $\frac{1}{k} < r$, und dann p_i hinreichend nahe an p. Weiter zeigen wir: jede Teilmenge $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, ist mit der induzierten Metrik ebenfalls separabel. Und zwar gibt es zu $i, k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $q_{i,k} \in M$ mit

$$d(q_{i,k}, p_i) < \operatorname{dist}(p_i, M) + \frac{1}{k}.$$

Für einen gegebenen Punkt $q \in M$ und $i, k \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} d(q_{i,k}, q) &\leq d(q_{i,k}, p_i) + d(p_i, q) \\ &< \operatorname{dist}(p_i, M) + \frac{1}{k} + d(p_i, q) \\ &\leq 2d(p_i, q) + \frac{1}{k} < \varepsilon, \end{aligned}$$

für p_i hinreichend nahe bei q und k groß. Insbesondere ergibt sich: in einem separablen metrischen Raum hat die Relativtopologie auf einer Teilmenge M eine abzählbare Umgebungsbasis.

Wir wollen jetzt erklären, was eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist. Im Gegensatz zur Analysis im $\mathbb{R}^n$ definieren wir nicht erst die Stetigkeit in einem festen Punkt, sondern gleich (bzw. nur) die Stetigkeit der gesamten Abbildung.

Definition 1.4 *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, falls folgende Implikation gilt:*

$$V \textit{ offen in } Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) \textit{ offen in } X.$$

Beispiel 1.4 In metrischen Räumen X, Y ist das äquivalent zur Folgenstetigkeit in allen Punkten $x \in X$.

Beispiel 1.5 Seien X, Y topologische Räume und $M \subset X$. Dann ist $f : M \to Y$ stetig bezüglich der Relativtopologie, wenn gilt: ist $V \subset Y$ offen, so gibt es $U \subset X$ offen mit

$$f^{-1}(V) = M \cap U.$$

Ist M eine offene Teilmenge von X, so ist das gleichbedeutend mit $f^{-1}(V)$ offen in X, dieser Fall tritt unten auf. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist die Einschränkung

$$f|_M : M \to Y,\ (f|_M)(x) := f(x),$$

stetig bezüglich der Relativtopologie auf M. Denn für $V \subset Y$ offen haben wir

$$(f|_M)^{-1}(V) = M \cap f^{-1}(V).$$

Definition 1.5 *Seien U, V offene Teilmengen der topologischen Räume X bzw. Y. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt Homeomorphismus, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} beide stetig sind (als Abbildungen nach Y bzw. X).*

Die hier eingeführten topologischen Begriffe sind gewöhnungsbedürftig. Wir wollen aber nun zum Konzept der Mannigfaltigkeit kommen. Die zentrale Idee ist, dass lokal Koordinaten definiert werden können.

Definition 1.6 (C^0-Atlas) *Sei M ein topologischer Raum.*

(a) *Eine n-dimensionale Karte von M ist ein Homeomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U)$ zwischen offenen Mengen $U \subset M$ und $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. U ist das Definitionsgebiet und $\varphi(U)$ das Parametergebiet der Karte φ.*

(b) *Ein n-dimensionaler C^0-Atlas von M ist ein System $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$, $i \in I$ Indexmenge, von n-dimensionalen Karten mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.*

Wir können uns den Atlas tatsächlich wie ein Buch vorstellen, auf der Seite mit der Nummer $i \in I$ ist das Teilgebiet U_i von M parametrisiert.

Definition 1.7 (C^0-Mannigfaltigkeit) *Ein topologischer Raum M, der Hausdorffsch ist und eine abzählbare Umgebungsbasis hat, heißt n-dimensionale C^0-Mannigfaltigkeit, wenn es einen n-dimensionalen C^0-Atlas von M gibt.*

Beispiel 1.6 Jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit der Relativtopologie ist eine n-dimensionale C^0-Mannigfaltigkeit, mit Atlas $\{\mathrm{id} : \Omega \to \Omega\}$.

Beispiel 1.7 $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ ist mit der Relativtopologie ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, vgl. Beispiele 1.2 und 1.3. Schreiben wir M als Graph über den Koordinatenachsen, so ergibt sich der folgende ein-dimensionale Atlas:

$$\begin{array}{lll}
\varphi_1 : U_1 = M \cap \{x > 0\} \to (-1, 1), & \varphi_1(x, y) = y, & \varphi_1^{-1}(y) = (1 - |y|, y) \\
\varphi_2 : U_2 = M \cap \{y > 0\} \to (-1, 1), & \varphi_2(x, y) = x, & \varphi_2^{-1}(x) = (x, 1 - |x|) \\
\varphi_3 : U_3 = M \cap \{x < 0\} \to (-1, 1), & \varphi_3(x, y) = y, & \varphi_3^{-1}(y) = (|y| - 1, y) \\
\varphi_4 : U_4 = M \cap \{y < 0\} \to (-1, 1), & \varphi_4(x, y) = x, & \varphi_4^{-1}(x) = (x, |x| - 1).
\end{array}$$

Zur Stetigkeit der Karten siehe Beispiel 1.5.

Beispiel 1.8 Das Kreuz $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$, mit der induzierten Topologie, ist keine eindimensionale C^0-Mannigfaltigkeit (Übungsaufgabe).

Bemerkung 1.1 Eine nichttriviale Bemerkung: zwei C^0-Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ auf demselben topologischen Raum M haben die gleiche Dimension. Wähle dazu Karten

$$\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^{n_i} \text{ in } \mathcal{A}_i \quad \text{mit } U_1 \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Dann ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ ein Homeomorphismus zwischen nichtleeren, offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{n_i}$. In der Topologie wird gezeigt, das ist nur für $n_1 = n_2$ möglich.

Die Bedingungen *Hausdorff* und *abzählbare Umgebungsbasis* sind technischer Natur, u.a. werden gewisse pathologische Fälle ausgeschlossen, wir wollen uns gar nicht damit befassen welche. Stattdessen stellen wir folgende wichtige Konsequenzen dieser Voraussetzungen fest.

Satz 1.1 (Kompaktheitseigenschaften) *Für eine topologische Mannigfaltigkeit M gilt:*

(1) *M ist lokal kompakt.*

(2) *Es gibt eine Ausschöpfung $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, mit G_k offen und $G_k \subset\subset G_{k+1}$.*

(3) *M hat einen abzählbaren Atlas.*

Beweis: Für (1) sei $p \in M$ und V offene Umgebung von p. Wähle eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$, und setze $\varphi(p) = x$. Es gibt dann ein $\delta > 0$ mit $\overline{B_\delta(x)} \subset \varphi(U)$. Dann ist

$$K_\delta = \varphi^{-1}(\overline{B_\delta(x)})$$

eine kompakte Umgebung von p, und für $\delta > 0$ klein ist $K_\delta \subset V$.

Nun zu Aussage (2). Sei V_i, $i \in \mathbb{N}$, eine Umgebungsbasis von M. Dann bilden die V_i mit $\overline{V_i}$ kompakt auch eine Umgebungsbasis: sei $\Omega \subset M$ offen. Zu $p \in \Omega$ wähle eine offene Umgebung V mit $\overline{V}$ kompakt. Es gibt dann ein $i \in I$ mit $p \in V_i \subset \Omega \cap V$, also $\overline{V_i}$ kompakt. Also können wir von vornherein annehmen, dass die V_i relativ kompakt sind, das heißt $\overline{V_i}$ ist kompakt. Definiere nun $G_1 = V_1$ und induktiv

$$G_k = \bigcup_{i=1}^{i_k} V_i \quad \text{wobei } i_k = \min\{i > i_{k-1} : \overline{G}_{k-1} \subset \bigcup_{j=1}^{i} V_j\}.$$

Nach Heine-Borel wird $\overline{G}_{k-1}$ durch endlich viele V_i übedeckt, daher bricht das Verfahren nicht ab und Behauptung (2) ist gezeigt. Behauptung (3) folgt, da jedes $\overline{G}_k$ durch endlich viele Kartengebiete überdeckt wird nach Heine-Borel. □

Eine Folge x_k in einem topologischen Raum X konvergiert gegen ein $x \in X$, wenn es zu jeder offenen Umgebung U von x ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_k \in U$ für alle $k > K$. Die Hausdorff-Eigenschaft garantiert, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert hat. In einer C^0-Mannigfaltigkeit M kann die Konvergenz wie folgt beschrieben werden:

> Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte mit $x \in U$, so konvergiert eine Folge x_k genau dann gegen x, wenn $x_k \in U$ für alle bis auf endlich viele k, und $\varphi(x_k) \to \varphi(x)$ in $\mathbb{R}^n$.

Ist $f : X \to Y$ stetig, so gilt die Implikation

$$x_k \to x \quad \Rightarrow \quad f(x_k) \to f(x).$$

Denn ist V offene Umgebung von $f(x)$, so ist $f^{-1}(V)$ offene Umgebung von x und damit $x_k \in f^{-1}(V)$, also $f(x_k) \in V$, für k hinreichend groß. Umgekehrt: ist $f : X \to Y$ in jedem Punkt $x \in X$ folgenstetig, so ist f stetig im Sinne von Definition 1.4 (ÜA). Im Kontext der Mannigfaltigkeiten ist also das Konzept der Folgenstetigkeit ausreichend.

Wie kommt nun die Differenzierbarkeit ins Spiel?

Definition 1.8 *Sei M ein topologischer Raum. Zwei n-dimensionale Karten $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$, $i = 1, 2$, heißen C^∞-kompatibel, wenn der Koordinatenwechsel*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Ein n-dimensionaler C^0-Atlas $\mathcal{A}$ heißt C^∞-Atlas (oder differenzierbar), wenn alle Karten in $\mathcal{A}$ C^∞-kompatibel sind.

Bemerkung 1.2 Für jeden Kartenwechsel $\phi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ist $D\phi(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Denn ϕ hat die Umkehrabbildung $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, und mit der Kettenregel folgt

$$D\psi(\phi(x))D\phi(x) = D(\psi \circ \phi)(x) = \mathrm{E}_n \qquad \text{für alle } x \in \varphi_1(U_1 \cap U_2).$$

Beispiel 1.9 Die n-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\}$ ist das absolute Standardbeispiel einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit (außer natürlich $\mathbb{R}^n$). Wir betrachten den Atlas, der durch stereographische Projektion vom Nord- bzw. Südpol gegeben ist:

$$U_1 = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t < 1\}, \quad U_2 = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > -1\}.$$

In Formeln lauten die beiden Abbildungen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,t) &= \frac{x}{1-t}, \qquad \varphi_1^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+|y|^2}, -\frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}\right); \\ \varphi_2(x,t) &= \frac{x}{1+t}, \qquad \varphi_2^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+|y|^2}, \frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}\right). \end{aligned}$$

Es gilt $U_1 \cap U_2 = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : -1 < t < 1\}$ und somit folgt

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^n \backslash \{0\} = \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Als Koordinatenwechsel ergibt sich

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = \frac{\dfrac{2y}{1+|y|^2}}{1 - \dfrac{1-|y|^2}{1+|y|^2}} = \frac{y}{|y|^2}.$$

Somit ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein C^∞-Atlas auf $\mathbb{S}^n$.

Beispiel 1.10 Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ das Quadrat aus Beispiel 1.7. Für die dort betrachteten $\varphi_{1,2}$ gilt $U_1 \cap U_2 = \{(x,y) \in M : x, y > 0\}$, und

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (0,1) \to (0,1),\ \varphi_2(\varphi_1^{-1}(y)) = 1 - y.$$

Analog sind die anderen Koordinatenwechsel differenzierbar, es handelt sich also, etwas überraschend, um einen C^∞-Atlas.

Allgemein hat man in der Wahl der Karten diverse Möglichkeiten. Sind zwei Karten (V_1, ψ_1) und (V_2, ψ_2) mit allen Karten (U_i, φ_i) aus einem C^∞-Atlas $\mathcal{A}_0$ kompatibel, so sind sie auch untereinander kompatibel. Denn $V_1 \cap V_2 = \bigcup_{i \in I} V_1 \cap V_2 \cap U_i$, und

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \psi_2 \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(V_2 \cap U_i)} \circ (\varphi_i \circ \psi_1)|_{\psi_1(V_1 \cap U_i)} \qquad \text{auf } V_1 \cap V_2 \cap U_i.$$

Definition 1.9 *Ein n-dimensionaler C^∞-Atlas $\mathcal{A}$ auf M heißt maximal, wenn jede n-dimensionale Karte, die mit den Karten in $\mathcal{A}$ C^∞-kompatibel ist, selbst schon zu $\mathcal{A}$ gehört. Ein solcher Atlas heißt auch C^∞-Struktur oder differenzierbare Struktur auf M.*

Zu einem gegebenen C^∞-Atlas $\mathcal{A}_0$ gibt es genau einen maximalen C^∞-Atlas $\mathcal{A}$, der $\mathcal{A}_0$ enthält. Und zwar nehmen wir einfach alle Karten hinzu, die mit $\mathcal{A}_0$ kompatibel sind. Wie bemerkt sind diese Karten auch miteinander kompatibel, wir bekommen also so einen differenzerbaren Atlas. Dieser ist maximal, denn jede mit $\mathcal{A}_0$ kompatible Karte ist ja dabei. Ist $\mathcal{A}'$ ein anderer maximaler Atlas, der $\mathcal{A}_0$ enthält, so ist jede Karte in $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{A}_0$ kompatibel, also gilt $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, und sogar Gleichheit wegen der Maximalität. Man muss hier sagen, es hat noch niemand einen maximalen Atlas konkret gesehen, es handelt sich um einen theoretischen Begriff, der aber nützlich ist.

Bemerkung 1.3 Natürlich können auch C^k-Atlanten für $k \in \mathbb{N}$ betrachtet werden. Aber jeder maximale C^k-Atlas $\mathcal{A}$ enthält einen C^∞-Atlas $\mathcal{A}'$ †.

Definition 1.10 *Eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit (oder: differenzierbare Mannigfaltigkeit) ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, zusammen mit einem n-dimensionalen, maximalen C^∞-Atlas auf M.*

Um eine differenzierbare Mannigfaltigkeit anzugeben, reicht wie gesagt die Angabe eines differenzierbaren Atlas.

Beispiel 1.11 Ist M eine C^0-Mannigfaltigkeit und besteht der zugehörige Atlas $\mathcal{A}$ nur aus einer Karte $\varphi : M \to \Omega$, so ist M automatisch eine C^∞-Mannigfaltigkeit, denn die Bedingung aus Definition 1.8 ist leer. Zum Beispiel ist jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in kanonischer Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit, als Karte wählt man $\mathrm{id} : \Omega \to \Omega$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ mit dieser Struktur eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beispiel 1.12 Sind M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n, so ist $M \times N$ kanonisch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$, die Produktmannigfaltigkeit von M und N (Übungsaufgabe).

Der folgende Satz liefert ein grundsätzliches Verfahren, um auf einer Menge ohne gegebene Topologie die Struktur einer Mannigfaltigkeit zu definieren.

---

† H. Whitney, Annals of Math. **37** (1936), 645–680.

Satz 1.2 *Sei M eine Menge und $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, ein System von bijektiven Abbildungen von $U_\lambda \subset M$ auf offene Mengen $V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$. Es gelte:*

(1) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = M$.

(2) $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ *ist offen für alle* $\lambda, \mu \in \Lambda$.

(3) $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ *ist stetig für alle* $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf M, so dass $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ein C^0-Atlas ist. Wird M durch eine abzählbare Teilfamilie $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda'\}$ überdeckt, so hat $\mathcal{O}$ abzählbare Basis.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass M eine C^0-Mannigfaltigkeit ist, ist im Einzelfall noch die Hausdorff-Eigenschaft nachzuweisen!

Beweis: (von Satz 1.2) Wir definieren die gesuchte Topologie durch

$$\mathcal{O} = \{U \subset M : \varphi_\lambda(U \cap U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n \text{ ist offen für alle } \lambda \in \Lambda\}.$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie, wie sich aus folgenden Tatsachen ergibt:

(i) $\varphi_\lambda(M \cap U_\lambda) = V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ ist offen nach Voraussetzung.

(ii) Für $W_\alpha \subset M$, $\alpha \in A$, gilt $\varphi_\lambda((\bigcup_{\alpha\in A} W_\alpha) \cap U_\lambda) = \bigcup_{\alpha\in A} \varphi_\lambda(W_\alpha \cap U_\lambda)$.

(iii) Für $W_i \subset M$, $i = 1, \ldots, N$, gilt $\varphi_\lambda((\bigcap_{i=1}^N W_i) \cap U_\lambda) = \bigcap_{i=1}^N \varphi_\lambda(W_i \cap U_\lambda)$.

Bezüglich $\mathcal{O}$ sind die Mengen U_λ offen nach Voraussetzung (2). Weiter ist $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ stetig, denn für $V \subset V_\lambda$ offen und $\mu \in \Lambda$ ist

$$\varphi_\mu(\varphi_\lambda^{-1}(V) \cap U_\mu) = \underbrace{(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})}_{(\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1})^{-1}}(V \cap \underbrace{\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)}_{\text{offen}})$$

offen. Schließlich ist $\varphi_\lambda^{-1} : V_\lambda \to U_\lambda$ nach Definition stetig, denn für $U \in \mathcal{O}$ mit $U \subset U_\lambda$ ist $\varphi_\lambda(U) = \varphi(U \cap U_\lambda)$ offen. Damit sind die $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ Homeomorphismen und bilden einen C^0-Atlas auf M.

Sei $\mathcal{O}'$ eine Topologie, so dass die $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ homeomorph sind. Für $U \in \mathcal{O}$ folgt dann

$$U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda^{-1}(\underbrace{\varphi_\lambda(U \cap U_\lambda))}_{\text{offen}} \in \mathcal{O}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O} \subset \mathcal{O}'.$$

Ist umgekehrt $U \in \mathcal{O}'$, so ist $U \cap U_\lambda \in \mathcal{O}'$ und $\varphi_\lambda(U \cap U_\lambda)$ ist offen, für alle $\lambda \in \Lambda$. Dies bedeutet $U \in \mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.

Schließlich gelte $M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$ mit Λ' abzählbar. Jedes V_λ hat eine abzählbare Basis $\{V_{\lambda,i} : i \in \mathbb{N}\}$ bezüglich der Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\{U_{\lambda,i} = \varphi_\lambda^{-1}(V_{\lambda,i}) : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis für U_λ und somit $\{U_{\lambda,i} : \lambda \in \Lambda', i \in \mathbb{N}\}$ abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{O}$ auf M. $\square$

Definition 1.11 *Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn für $A \subset X$ folgende Implikation gilt:*

$$A \text{ offen und abgeschlossen, } A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = X.$$

Alternativ: jede lokal konstante Funktion auf X ist konstant.

Beispiel 1.13 Das Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Denn sei $A \subset [0,1]$ offen, abgeschlossen und nichtleer. Dann folgt für die charakteristische Funktion $\chi'_A \equiv 0$, also $\chi_A \equiv 1$ bzw. $A = X$. //

Definition 1.12 *Sei X topologischer Raum, und $x_0, x_1 \in X$. Ein Weg von x_0 nach x_1 ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([0,1], X)$ mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Wenn es einen solchen Weg gibt, so heißen x_0, x_1 verbindbar. X heißt wegzusammenhängend, wenn je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ verbindbar sind.*

Lemma 1.1 *Sei X ein topologischer Raum.*

(i) *„verbindbar“ ist Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen Wegkomponenten.*

(ii) *X wegzusammenhängend $\quad\Rightarrow\quad$ X zusammenhängend.*

Beweis: Für (i) prüfen wir die drei Eigenschaften:

$x \sim x$**:** wähle $\gamma(t) \equiv x \quad$ für alle $t \in [0,1]$.

$x_0 \sim x_1 \;\Rightarrow\; x_1 \sim x_0$**:** sei γ Weg von x_0 nach x_1; wähle $\sigma(t) = \gamma(1-t)$ für $t \in [0,1]$.

$x_0 \sim x_1$**,** $x_1 \sim x_2 \;\Rightarrow\; x_0 \sim x_2$**:** Seien γ_1, γ_2 Wege von x_0 nach x_1 bzw. x_1 nach x_2. Wähle

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Für (ii) sei $A \subset X$ offen und abgeschlossen, und $x_0 \in A$. Nach Vorassetzung gibt es zu $x \in X$ einen Weg γ von x_0 nach x. Dann ist $\gamma^{-1}(A) \subset [0,1]$ offen und abgeschlossen, sowie $0 \in \gamma^{-1}(A)$. Nach Beispiel 1.13 ist dann $x = \gamma(1) \in A$, also $A = X$. □

Satz 1.3 *Sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

$$M \quad \text{wegzusammenhängend} \quad \Leftrightarrow \quad M \quad \text{zusammenhängend.}$$

Beweis: Es ist nur noch die Aussage „$\Leftarrow$“ zu zeigen. Der Beweis beruht darauf, dass M *lokal* wegweise zusammenhängend ist. Wähle nämlich zu $x \in M$ eine Karte $\varphi : U \to V$ mit $x \in U$. Für $r > 0$ hinreichend klein gilt $B_r(\varphi(x)) \subset V$, und $U_x := \varphi^{-1}\big(B_r(\varphi(x))\big)$ ist wegweise zusammenhängend.

Sei nun $x_0 \in M$ beliebig und A die Wegkomponente von x_0. Für $x \in X$ gilt entweder $U_x \subset A$ oder $U_x \subset X \backslash A$. Somit sind A und $X \backslash A$ offen. Wegen $x_0 \in A$ folgt $A = M$, also ist M wegzusammenhängend. □

Beispiel 1.14 Folgende Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht wegweise:

$$M = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x < 1\} \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

2 Abbildungen und Überlagerungen

Die Stetigkeit von Abbildungen zwischen differenzerbaren Mannigfaltigkeiten ist definiert, sie sind ja insbesondere topologische Räume. Jetzt geht es um C^k Abbildungen.

Definition 2.1 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn es zu jedem $p \in M$ Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ von M bzw. N gibt mit*

(a) *$p \in U$ und $f(U) \subset V$,*

(b *$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k(\varphi(U), \mathbb{R}^n)$.*

Wir bezeichnen diese Abbildungen mit $C^k(M, N)$, im Fall $N = \mathbb{R}$ mit $C^k(M)$.

Hier zwei Anmerkungen zur Definition:

- Ist $f : M \to N$ stetig und $V \subset N$ offene Umgebung von $f(p)$, so hat p eine offene Umgebung U mit $f(U) \subset V$, zum Beispiel $U = f^{-1}(V)$.
- Für $k = 0$ gibt diese Definition eine äquivalente Fassung der Stetigkeit.
- Seien $\varphi' : U' \to \varphi(U')$ bzw. $\psi' : V' \to \psi(V')$ irgendwelche Karten von M bzw. N. mit $f(U') \subset V'$. Dann folgt

$$\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} \in C^k(\varphi'(U'), \mathbb{R}^n).$$

Zu $p \in U'$ wähle nämlich $\varphi : U \to \varphi(U)$, $\psi : V \to \psi(V)$ wie in Definition 2.1. Die Behauptung ergibt sich aus folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\varphi(U \cap U') \arrow[rrr, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\in C^k"] & & & \psi(V \cap V') \arrow[d, "\psi'\circ\psi^{-1}\in C^\infty"] \\
 & U \cap U' \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[dl, "\varphi'"] \arrow[r, "f"] & V \cap V' \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & \\
\varphi'(U \cap U') \arrow[uu, "\varphi\circ(\varphi')^{-1}\in C^\infty"] \arrow[rrr, "\psi'\circ f\circ(\varphi')^{-1}"] & & & \psi'(V \cap V')
\end{tikzcd}$$

Statt *zu jedem p gibt es Karten mit ...* könnten wir somit in der Definition äquivalent schreiben: *für alle Karten mit ....*

Beispiel 2.1 Betrachte $\mathbb{S}^n$ mit den Karten φ_1, φ_2 aus Beispiel 1.9 (stereographische Projektion von Nordpol bzw. Südpol). Für $\lambda > 0$ sei

$$\tau_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \tau_\lambda(x) = \lambda\, x.$$

Definiere nun $\sigma_\lambda : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ wie folgt:

$$\sigma_\lambda(p) = \begin{cases} \big(\varphi_1^{-1} \circ \tau_\lambda \circ \varphi_1\big)(p) & \text{falls } p \neq (0,1) \\ (0,1) & \text{falls } p = (0,1). \end{cases}$$

Wir zeigen, dass σ_λ eine C^∞-Abbildung ist: für $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ gilt $\sigma_\lambda(U_1) \subset U_1$ und

$$\varphi_1 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_1^{-1} = \tau_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Für $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ gilt $\sigma_\lambda(U_2) \subset U_2$ und

$$\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1} \circ \tau_\lambda \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1} & x \neq 0 \end{cases}$$

Nach Beispiel 1.9 ist $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x) = x/|x|^2$, also folgt für $x \neq 0$

$$(\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1})(x) = \frac{\tau_\lambda \left(x/|x|^2\right)}{\left|\tau_\lambda \left(x/|x|^2\right)\right|^2} = \frac{1}{\lambda} x.$$

Insgesamt folgt $\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda} x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, insbesondere für $x = 0$, also ist $\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1} \in C^\infty$.

Definition 2.2 *Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt Diffeomorphismus, falls f bijektiv ist, und f, f^{-1} von der Klasse C^∞ sind.*

Beispiel 2.2 Die Abbildung $\sigma_\lambda : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist ein Diffeomorphismus, denn $\sigma_\lambda^{-1} = \sigma_{1/\lambda}$.

Beispiel 2.3 Betrachte auf $\mathbb{R}$ die beiden Atlanten

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = x\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = x^3\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ definieren verschiedene differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$, denn die Karten sind nicht einmal C^1-kompatibel (geschweige denn C^∞):

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto s^3 \\ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{t} & t \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-t} & t < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ist nicht differenzierbar in $t = 0$. Die Abbildung

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2), \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}$$

ist aber ein Diffeomorphismus! Denn

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\ \varphi_1 \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1} &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Auf der Menge der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (mit maximalen Atlanten) ist

$$M \sim N \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ diffeomorph } N$$

eine Äquivalenzrelation; ihre Äquivalenzklassen heißen Diffeomorphietypen. Natürlich ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit insbesondere eine topologische Mannigfaltigkeit. Es ist eine sehr schwierige Frage, wieviele verschiedene Mannigfaltigkeiten – im Sinn von nicht homeomorph oder nicht diffeomorph - es in der jeweiligen Dimension gibt. Hier nur einige Ausblicke ohne Beweis, wobei wir stets von zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ausgehen:

- Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keinen differenzierbaren Atlas zulassen. Das erste Beispiel in Dimension 10 stammt von Kervaire (1960), durch Konstruktion einer topologischen Invariante. Donaldson fand 1984 Beispiele in Dimension 4, sein Beweis beruht auf der Analysis einer nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung, der Yang-Mills Gleichung (Fields-Medaille 1986).

- Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die mehrere nicht diffeomorphe differenzierbare Strukturen besitzen. So gibt es auf der 7-dimensionalen Sphäre 28 verschiedene differenzierbare Strukturen (Milnor 1962, Fields Medaille 1964). Und 1984 zeigte Gompf (aufbauend auf den Resultaten von Donaldson) die Existenz überabzählbar vieler, nicht diffeomorpher C^∞-Strukturen auf $\mathbb{R}^4$!

- Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ ist die einzige kompakte, eindimensionale Mannigfaltigkeit, die einzige nichtkompakte ist $\mathbb{R}$, das ist also relativ einfach. In Dimension 2 hat man eine vollständige Liste der kompakten orientierbaren Flächen: es sind die Sphäre, der Torus, die Brezel (2 Löcher), und so weiter. Die Brezel kann durch Zusammensetzen von 2 Tori konstruiert werden, man entfernt jeweils eine kleine Kreisscheibe und verbindet durch einen Zylinder. Analog kann eine Fläche mit p Löchern aus p Tori gebaut werden. Für die kompakten, nicht orientierbaren Flächen gibt es eine ganz analoge Beschreibung. Diese Klassifikation beruht auf komplexer Analysis, dem Uniformisierungssatz von Poincaré und Koebe (1883/1907). In Dimension 1 und 2 gibt es keine exotischen Beispiele wie oben, das heißt topologisch oder differenzierbar macht keinen Unterschied. Dasselbe gilt übrigens auch in Dimension 3.

- Die Poincaré-Vermutung besagt dass jede 3-dimensionale kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit diffeomorph zur 3-Sphäre ist. Das wurde von Perelman 2003 bewiesen (Fields Medaille 2006, abgelehnt). Zum Beweis verwendet er eine Deformation der Mannigfaltigkeit durch den Ricci-Fluss, eine nichtlineare parabolische Differentialgleichung. Er zeigt auch eine allgemeine Klassifikation von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten, die Vermutung von Thurston.

- In Dimension $n \geq 4$ gibt es eine verallgemeinerte Poincaré-Vermutung: grob gesagt soll eine Mannigfaltigkeit mit den Homotopieeigenschaften einer n-Sphäre bereits homeomorph zur n-Sphäre sein. Für $n \geq 5$ wurde das von Smale 1960 gezeigt (Fields-Medaille 1966), den Fall $n = 4$ hat Friedman 1982 erledigt (Fields-Medaille 1986). Diese Beweise sind topologischer Natur, während für $n = 3$ die Analysis entscheidend war.

Soweit die Highlights des 20. Jahrhuinderts, nun aber zurück zu den Niederungen der Vorlesung. Eine Verkettung von C^k-Abbildungen ist wieder eine C^k-Abbildung, das heißt

$$f \in C^k(M,N),\ g \in C^k(N,P) \quad \Rightarrow \quad g \circ f \in C^k(M,P). \tag{2.1}$$

Um das zu etwas genauer zu zeigen, wähle zu $p \in M$ Karten

$$\begin{array}{lll} \varphi : U \to \varphi(U) & \text{mit} & p \in U, \\ \psi : V \to \psi(V) & \text{mit} & f(p) \in V, \\ \chi : W \to \chi(W) & \text{mit} & g(f(p)) \in W. \end{array}$$

Wir können $f(U) \subset V$ und $g(V) \subset W$ annehmen, sonst ersetze erst V durch $V \cap g^{-1}(W)$ und dann U durch $U \cap f^{-1}(V)$. Unsere Behauptung (2.1) folgt nun aus der C^k-Kettenregel:

$$\chi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\chi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \in C^k(\varphi(U), \mathbb{R}^p) \quad \text{wobei } p = \dim P.$$

Satz 2.1 *Die Menge* $\mathrm{Diff}(M)$ *der* C^∞*-Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit* M *ist eine Untergruppe der Bijektionen von* M*.*

Beweis: Für $f, g \in \mathrm{Diff}(M)$ ist $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Diff}(M)$ wegen (2.1). □

Die Homeomorphismen und die C^k-Diffeomorphismen, $k \in \mathbb{N}$, bilden auch eine Gruppe.

Definition 2.3 *Sei* Γ *eine Untergruppe von* $\mathrm{Diff}(M)$*. Dann ist*

$$p \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g \in \Gamma \text{ mit } g(p) = q$$

eine Äquivalenzrelation auf M*. Sei* $\pi : M \to M/\!\sim$*,* $\pi(p) = [p]$*, die Projektion auf die Menge der Äquivalenzklassen. Wir betrachten auf* $M/\!\sim$ *die Quotiententopologie*

$$U \subset M/\!\sim \ \text{offen} \quad \Leftrightarrow \quad \pi^{-1}(U) \subset M \ \text{offen.}$$

Bezeichnungen: Die Äquivalenzklasse $[\,p\,] = \{g(p) : g \in \Gamma\}$ wird mit $\Gamma \cdot p$ bezeichnet, sie heißt Bahn von p. Der Quotient $M/\!\sim$ heißt Bahnenraum, die übliche Notation ist M/Γ.

Dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, sieht man leicht: es gilt $\mathrm{id}_{\mathrm{M}}(p) = p$, aus $g(p) = q$ folgt $g^{-1}(q) = p$, und mit $g(p) = q$, $h(q) = r$ ist $(h \circ g)(p) = r$. Dabei ist $\mathrm{id}_{\mathrm{M}} \in \Gamma$, und mit $g, h \in \Gamma$ sind auch $g^{-1}, h \circ g \in \Gamma$. Auch die Eigenschaften der Topologie folgen direkt, es gilt

$$\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \pi^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i), \quad \pi^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{N} U_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{N} \pi^{-1}(U_i).$$

Nach Definition der Topologie ist die Abbildung $\pi : M \to M/\Gamma$ stetig. Sie bildet außerdem offene Mengen in offene Mengen ab, denn für $V \subset M$ offen gilt

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(V) = \text{ offen in } M.$$

Sei V_i, $i \in I$, abzählbare Basis von M. Dann bilden die $U_i = \pi(V_i)$ eine abzählbare Basis von M/Γ. Denn für $U \subset M/\Gamma$ offen ist $\pi^{-1}(U)$ Vereinigung von Mengen V_i, $i \in I'$, und es folgt

$$U = \pi(\pi^{-1}(U)) = \pi\Big(\bigcup_{i \in I'} V_i\Big) = \bigcup_{i \in I'} \pi(V_i) = \bigcup_{i \in I'} U_i.$$

Die Frage ist nun, ob M/Γ eine Mannigfaltigkeit ist. Die folgenden zwei Beispiele zeigen, dass das ohne weiteres nicht stimmt.

Beispiel 2.4 Die Gruppe $\Gamma = \pm 1$ operiert durch Multiplikation auf $\mathbb{R}$, aber $\mathbb{R}/\Gamma$ ist keine eindimensionale C^0-Mannigfaltigkeit. Denn sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine beliebige Karte mit $[0] \in U$. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \pi^{-1}(U)$ bzw. $(-\varepsilon, \varepsilon)/\pm \subset U$. Durch Einschränkung haben wir den Homeomorphismus $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon)/\pm \to V$, für $V \subset \mathbb{R}$ offen. Setze $x = \varphi([0])$. Die Abbildung $\varphi \circ \pi : (0, \varepsilon) \to V \backslash \{x\}$ ist stetig und surjektiv, also ist $V \backslash \{x\}$ zusammenhängend, ein Widerspruch.

Beispiel 2.5 Die Gruppe $\Gamma = (\mathbb{Q}, +)$ operiert durch Addition auf $\mathbb{R}$. Der topologische Raum $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist aber nicht Hausdorffsch: seien $U_i \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ offene Umgebungen von $\pi(x_i)$ für $i = 1, 2$. Dann sind $V_i = \pi^{-1}(U_i)$ offene Umgebungen von $x_{1,2}$. Da $\mathbb{Q}$ dicht, gibt es $q_k \in \mathbb{Q}$ mit $q_k \to x_2 - x_1$. Es folgt $U_1 \ni \pi(x_1) = \pi(x_1 + q_k) \in \pi(V_2) = U_2$ für k hinreichend groß.

Um diese Probleme auszuschliessen, führen wir folgende Bedingung ein.

Definition 2.4 *Die Untergruppe* $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(M)$ *operiert eigentlich diskontinuierlich auf* M*, falls folgende zwei Bedingungen gelten:*

(i) *Zu* $p \in M$ *gibt es eine offene Umgebung* U *mit* $g(U) \cap U = \emptyset$ *für alle* $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_M\}$.

(ii) *Zu* $p, q \in M$ *mit* $q \notin \Gamma \cdot p$ *gibt es offene Umgebungen* U, V *mit* $V \cap \bigcup_{g \in \Gamma} g(U) = \emptyset$.

Aus Bedingung (i) folgt insbesondere, dass Γ (Fixpunkt-)frei operiert, das heißt für alle $p \in M$ und alle $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_M\}$ gilt $g(p) \neq p$. Der Begriff *eigentlich diskontinuierlich* ist in der Literatur nicht einheitlich, oft wird nur Bedingung (i) verlangt. Wir werden unten klar sehen, welche Rolle (i) und (ii) spielen. Vorher betrachten wir den Spezialfall, dass Γ bezüglich einer Metrik $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ isometrisch operiert, also

$$d\big(g(x), g(y)\big) = d(x, y) \qquad \text{für alle } x, y \in M,\ g \in \Gamma.$$

Bedingung (i) ist dann erfüllt, wenn

$$\varrho(p) = \inf\{d(g(p), p) : g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_M\}\} > 0 \qquad \text{für alle } p \in M. \tag{2.2}$$

Denn sei $U = B_{\frac{\varrho}{2}}(p)$ mit $\varrho = \varrho(p)$. Dann ist $g(U) = B_{\frac{\varrho}{2}}(g(p))$, und für $q \in g(U) \cap U$ folgt

$$d(g(p), p) \leq d(g(p), q) + d(q, p) < \frac{\varrho}{2} + \frac{\varrho}{2} = \varrho, \qquad \text{also } g = \mathrm{id}_M.$$

Weiter ergibt sich Bedingung (ii) aus der Forderung

$$\delta(p, q) = \inf\{d\big(g(p), h(q)\big) : g, h \in \Gamma\} > 0 \qquad \text{falls } \Gamma \cdot p \neq \Gamma \cdot q. \tag{2.3}$$

Man bezeichnet $\delta(p, q)$ auch als Bahnenabstand von p und q, offenbar gilt $\delta(p', q') = \delta(p, q)$ für alle $p' \in \Gamma \cdot p$, $q' \in \Gamma \cdot q$. Wir wählen als Umgebungen $U = B_{\delta/2}(p)$ und $V = B_{\delta/2}(q)$ mit $\delta = \delta(p, q) > 0$. Angenommen es gibt $x \in g(U) \cap h(V) = B_{\delta/2}(g(p)) \cap B_{\delta/2}(h(q))$, dann folgt

$$d\big(g(p), h(q)\big) \leq d(g(p), x) + d(x, h(q)) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \qquad \text{Widerspruch.}$$

Als Anwendung betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 2.6 Die Gruppe $\Gamma = \{\pm \mathrm{id}\}$ operiert isometrisch auf $\mathbb{S}^n$ bezüglich des Euklidischen Abstands $d(p, q) = |p - q|$. Es gilt für alle $p, q \in \mathbb{S}^n$

$$\varrho(p) = d(-p, p) = 2 \qquad \text{und} \qquad \delta(p, q) = \min\big(|p - q|, |p - (-q)|\big).$$

Die Bedingungen (2.2) und (2.3) sind also erfüllt. Allgemein gilt das immer, wenn eine endliche Gruppe (Fixpunkt-)frei operiert.

Beispiel 2.7 Betrachte auf $\mathbb{R}^n$ die Opeation von $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ durch Translationen:

$$\tau_k(p) = p + k \qquad \text{für } p \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}^n.$$

Es ist hier praktisch, auf $\mathbb{R}^n$ die Maximumsnorm $\|p\| = \max_{1 \leq i \leq n} |p^i|$ zu wählen. Die Operation ist bezüglich der zugehörigen Metrik isometrisch, denn es gilt

$$d(\tau_k(p), \tau_k(q)) = \|(p + k) - (q + k)\| = \|p - q\| = d(p, q).$$

Es gilt $\varrho(p) = \inf\{\|(p+k)-p\| : k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}\} = 1$. Weiter folgt für $q - p \notin \mathbb{Z}^n$ mit einer einfachen Kompaktheitsüberlegung

$$\delta(p,q) = \inf\{|q-p+k| : k \in \mathbb{Z}^n\} > 0.$$

Somit ist auch diese Operation eigentlich diskontinuierlich im Sinne von Definition 2.4.

Definition 2.5 *Eine stetige und surjektive Abbildung $\pi : M \to X$ zwischen topologischen Räumen heißt Überlagerung, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so dass*

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

mit $V_i \subset M$ offen, paarweise disjunkt und $\pi|_{V_i} : V_i \to U$ homeomorph.

Ein solches U heißt Umgebung mit Überlagerungseigenschaft. Finden Sie für die vorigen zwei Beispiele eine solche Umgebung.

Beispiel 2.8 Standardbeispiel einer Überlagerung ist $c : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $c(s) = e^{is}$. Nach Analysis 1 ist die Abbildung stetig und surjektiv. Zu $\omega = e^{it}$ wähle die offene Umgebung

$$U = \{z \in \mathbb{S}^1 : \langle z, \omega \rangle > 0\}.$$

Es gilt $\langle e^{is}, e^{it} \rangle = \cos(s-t)$, also ist $e^{is} \in U$ genau wenn $\cos(s-t) > 0$. Somit ist $c^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung der offenen Intervalle I_k, $k \in \mathbb{Z}$, mit

$$I_k = \Big\{2\pi k + t + \alpha : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\Big\}.$$

Wir behaupten, dass $c|_{I_k}$ folgende Umkehrfunktion hat:

$$\varphi_k : U \to I_k,\ \varphi_k(z) = 2\pi k + t + \arcsin\langle z, i\omega \rangle \in I_k.$$

Denn für $z = e^{is}$, $s = 2\pi k + t + \alpha$ mit $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ist $\langle z, i\omega \rangle = \sin(s-t) = \sin\alpha$, also

$$\varphi_k(c(s)) = 2\pi k + t + \arcsin(\sin\alpha) = 2\pi k + t + \alpha = s.$$

φ_k ist stetig und damit $\pi|_{I_k}$ homeomorph.

Bemerkung 2.1 Sei $\pi : M \to X$ Überlagerung und X zusammenhängend. Dann ist $\operatorname{card} \pi^{-1}\{x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ für alle $x \in X$ gleich, diese Zahl heißt Grad der Überlagerung. Denn ist U Umgebung von $x \in X$ mit $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ wie in Definition 2.5, so gilt

$$\operatorname{card} \pi^{-1}\{x'\} = \operatorname{card} I = \operatorname{card} \pi^{-1}\{x\} \quad \text{für alle } x' \in U.$$

Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist daher $X_k = \{x \in X : \operatorname{card} \pi^{-1}\{x\} = k\}$ offen. Wegen $X \backslash X_k = \bigcup_{\ell \neq k} X_\ell$ ist X_k auch abgeschlossen. Wählen wir k mit $X_k \neq \emptyset$ so folgt $X = X_k$.

Satz 2.2 (diskrete Quotienten) *Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, auf der die Gruppe $\Gamma \subset \operatorname{Diff}(M)$ eigentlich diskontinuierlich operiert. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *M/Γ ist Hausdorffsch mit abzählbarer Basis, und $\pi : M \to M/\Gamma$ ist Überlagerung.*

(ii) *Es gibt genau eine differenzierbare Struktur auf M/Γ, so dass π lokal diffeomorph ist.*

Beweis: Es ist schon klar, dass $X = M/\Gamma$ abzählbare Basis hat. Nach Voraussetzung hat jedes $p \in M$ eine offene Umgebung U mit $g(U) \cap U = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_M\}$. Es folgt

$$\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(U).$$

Aus $p \in g_1(U) \cap g_2(U)$ folgt $g_1^{-1}(p) \in U \cap (g_1^{-1} \circ g_2)(U)$, also $g_1^{-1} \circ g_2 = \mathrm{id}_M$ bzw. $g_2 = g_1$. Somit ist die Vereinigung disjunkt. Die Mengen $g(U)$ sind offen, und wie gezeigt ist $\pi : g(U) \to \pi(U)$ stetig und offen. Aus $\pi(q_1) = \pi(q_2)$ für $q_i \in g(U)$ folgt $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ für $p_i = g^{-1}(q_i) \in U$. Es gibt dann $g' \in \Gamma$ mit $g'(p_1) = p_2$. Also folgt $g'(U) \cap U \neq \emptyset$, und damit $g' = \mathrm{id}_M$ und weiter $p_1 = p_2$ bzw. $q_1 = q_2$. Somit ist $\pi : g(U) \to \pi(U)$ bijektiv, und Behauptung (i) ist bewiesen.

Zum Beweis der Hausdorff-Eigenschaft seien $p, q \in M$ mit $\pi(p) \neq \pi(q)$. Für U, V wie in Definition 2.3(ii) sind $\pi(U)$, $\pi(V)$ offene Umgebungen der Punkte $\pi(p), \pi(q) \in X$, da π offen ist. Wäre $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$, so gibt es $p' \in U$, $q' \in V$ mit $\pi(p') = \pi(q')$, also $g(p') = q'$ für ein $g \in \Gamma$. Aber $g(U) \cap V = \emptyset$ nach Wahl von U, V, ein Widerspruch.

Als nächstes konstruieren wir die differenzierbare Struktur. Wie bereits gezeigt, gibt es zu $p \in M$ eine Umgebung U_p mit folgenden Eigenschaften:

- $g(U_p) \cap U_p = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_M\}$
- es gibt eine Karte $\psi_p : U_p \to \psi_p(U_p) \subset \mathbb{R}^m$.

Definiere nun auf X die Karten

$$\varphi_p = \psi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1} : \pi(U_p) \to \psi_p(U_p) \subset \mathbb{R}^m.$$

Die φ_p sind homeomorph, zu zeigen bleibt die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel. Sei $x = \pi(p') = \pi(q')$ mit $p' \in U_p$, $q' \in U_q$; wir zeigen dass der Kartenwechsel auf einer Umgebung von $\varphi_p(x) = \psi_p(p')$ differenzierbar ist. Es gilt $q' = g(p')$ für ein $g \in \Gamma$, und

$$\pi|_{U_q} \circ g = \pi|_{U_p} \quad \text{bzw.} \quad g = \big(\pi|_{U_q}\big)^{-1} \circ \pi|_{U_p} \qquad \text{auf } U_p \cap g^{-1}(U_q).$$

Daraus folgt auf der Umgebung $\psi_p\big(U_p \cap g^{-1}(U_q)\big) \ni \psi_p(p')$

$$\varphi_q \circ \varphi_p^{-1} = \big(\psi_q \circ (\pi|_{U_q})^{-1}\big) \circ \big(\psi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1}\big)^{-1} = \psi_q \circ g \circ \psi_p^{-1}.$$

Die rechte Seite ist die Koordinatendarstellung des Diffeomorphismus g, also in C^∞. Sei schließlich $\mathcal{A}$ ein Atlas auf X, so dass $\pi : M \to X$ lokal diffeomorph ist. Dann ist für jede Karte $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ in $\mathcal{A}$ und jede Karte $\psi_p : U_p \to \psi_p(U_p)$ die zugehörige Koordinatendarstellung

$$\varphi \circ \pi \circ \psi_p^{-1} : \varphi_p\big(\pi(U_p) \cap \Omega\big) \to \varphi\big(\pi(U_p) \cap \Omega\big)$$

diffeomorph. Wegen $\pi \circ \psi_p^{-1} = \varphi_p^{-1}$ sind also die Kartenwechsel $\varphi \circ \varphi_p^{-1}$ differenzierbar, das heißt $\mathcal{A}$ definiert dieselbe differenzierbare Struktur. $\square$

Definition 2.6 *Sei X wegzusammenhängender topologischer Raum. Eine Schleife in X ist eine stetige Kurve $c : [0,1] \to X$, $c = c(s)$, mit $c(0) = c(1)$. Zwei Schleifen c_0, c_1 heißen homotop, wenn es ein $h \in C^0([0,1] \times [0,1], X)$, $h = h(s,t)$, gibt mit*

$$h(s,0) = c_0(s) \text{ und } h(s,1) = c_1(s) \quad \text{für alle } s \in [0,1].$$

Ist dabei c_0 konstant, so heißt c_1 nullhomotop.

Definition 2.7 *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife $c : [0,1] \to X$ nullhomotop ist.*

Beispiel 2.9 Jede konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend, und allgemeiner jede sternförmige Menge. Die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind einfach zusammenhängend genau für $n \geq 2$.

Satz 2.3 *Sei X eine zusammenhängende, m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine einfach zusammenhängende, m-dimensionale Mannigfaltigkeit M und eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Diff}\,(M)$, die eigentlich diskontinuierlich operiert, so dass X diffeomorph ist zu M/Γ.*

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass das Studium von Mannigfaltigkeiten in zwei Schritte zerlegt wird, nämlich erstens das Studium der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten M und zweitens das Studium der eigentlich diskontinierlichen Gruppenoperationen auf solchen M. Zumindest ist das theoretisch so.

3 Tangentialvektoren und Differential

Die Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : M \to N$ ist über ihre Koordinatendarstellungen definiert, unabhängig von der Wahl der der Koordinaten. Doch was ist die Ableitung von f? Hierzu müssen wir als erstes erklären, was der Tangentialraum von M im Punkt p sein soll. Es gibt drei verschiedene Zugänge:

a) geometrisch als Tangentenvektoren von Kurven

b) physikalisch mittels Koordinatenvektoren

c) algebraisch als Ableitungsoperatoren

Wir beginnen mit dem ersten Zugang. Die Idee ist, den Tangentialvektor durch Kurven zu repräsentieren. Dabei sind Kurven als äquivalent anzusehen, wenn ihre Koordinatendarstellung die gleiche Ableitung hat.

Definition 3.1 (Tangentialraum) *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein Tangentialvektor im Punkt $p \in M$ ist eine Äquivalenzklasse $[c]$ von C^1-Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c(0) = p$, unter folgender Äquivalenzrelation:* *

$$c_1 \sim c_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0) \text{ für eine (und damit alle) Karte } \varphi : U \to \varphi(U) \text{ von } M.$$

Die Menge aller Tangentialvektoren in p heißt Tangentialraum T_pM.

Der Zusatz *und damit alle* ergibt sich wie folgt. Sei $\psi : V \to \psi(V)$ eine weitere Karte mit $p \in V$. Dann ist $c(t) \in U \cap V$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, und es folgt

$$(3.1) \qquad (\psi \circ c)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c)'(0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(\varphi \circ c)'(0).$$

Beispiel 3.1 Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in U$ ist T_xU kanonisch bijektiv zu $\mathbb{R}^n$ vermöge der Abbildung

$$T_xU \to \mathbb{R}^n,\ [c] \mapsto c'(0).$$

Die Injektivität folgt unmittelbar aus der Definition des Tangentialvektors. Für die Surjektivität betrachte für gegebenes $v \in \mathbb{R}^n$ die Kurve

$$(3.2) \qquad c_{x,v} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U,\ c_{x,v}(t) = x + tv \quad \text{mit } \varepsilon > 0 \text{ hinreichend klein.}$$

Offenbar gilt dann $[c_{x,v}] \mapsto v$.

Das Differential kann nun als Abbildung zwischen den Tangentialräumen erklärt werden.

Definition 3.2 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f \in C^1(M, N)$. Die Ableitung von f im Punkt p ist die Abbildung*

$$Df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N,\ [c] \mapsto [f \circ c].$$

Wir werden auf T_pM bzw. $T_{f(p)}N$ eine Vektorraumstruktur definieren, so dass $Df(p)$ eine lineare Abbildung ist.

*Dabei kann $\varepsilon > 0$ von c abhängen, und die Darstellung $\varphi \circ c$ muss nur nahe bei $t = 0$ definiert sein.

Lemma 3.1 *Die Ableitung $Df(p)$ von $f \in C^1(M,N)$ ist wohldefiniert.*

Beweis: Wir leiten dazu eine Transformationsformel her. Für $p \in M$ seien $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ Karten von M bzw. N mit $p \in U$ und $f(U) \subset V$. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine C^1-Kurve mit $c(0) = p$. Dann folgt aus der Standard Kettenregel

$$(\psi \circ f \circ c)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c)'(0) = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(\varphi \circ c)'(0). \tag{3.3}$$

Also folgt aus $c_1 \sim c_2$ auch $f \circ c_1 \sim f \circ c_2$, das heißt $Df(p)([c])$ ist wohldefiniert. $\square$

Beispiel 3.2 Hier geht es um die Beziehung zur üblichen Ableitung im $\mathbb{R}^n$. Sei zuerst $f \in C^1(M,V)$ mit $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Wir fassen die $Df(p)$ aus Definition 3.2 als Abbildung nach $\mathbb{R}^m$ auf, indem wir $T_f(p)V$ mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren nach Beispiel 3.1. Das ergibt

$$Df(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n,\ [c] \mapsto [f \circ c] \mapsto (f \circ c)'(0).$$

Sei nun $f \in C^1(U,N)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir fassen dann $Df(x)$, $x \in U$, als Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $T_{f(x)}N$ auf, indem wir nun T_xU mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren nach Beispiel 3.1:

$$Df(x) : \mathbb{R}^n \to T_{f(x)}N,\ v \mapsto [c_{x,v}] \mapsto= [f \circ c_{x,v}] \quad \text{wobei } c_{x,v}(t) = x + tv.$$

Sei schließlich $f \in C^1(U,V)$ mit offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$. Mit obigen Identifikationen bildet $Df(x)$ wie folgt ab:

$$Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto [f \circ c_{x,v}] \mapsto (f \circ c_{x,v})'(0) = Df(x)v.$$

Dabei ist rechts die gewöhnliche mehrdimensionale Ableitung gemeint. Somit ist unsere Bezeichnung mit der gewohnten Notation im $\mathbb{R}^n$ konsistent.

Satz 3.1 *Seien M, N, P differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ist $f \in C^1(M,N)$ und $g \in C^1(N,P)$, so folgt $g \circ f \in C^1(M,P)$ und es gilt*

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p) \quad \text{für alle } p \in M.$$

Beweis: Die Aussage $g \circ f \in C^1(M,P)$ wurde bereits in (2.1) gezeigt. Ist $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine C^1-Kurve mit $c(0) = p$, so gilt nach Definition

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(p)([c]) &= [(g \circ f) \circ c] \\ &= [g \circ (f \circ c)] \\ &= Dg(f(p))\big([f \circ c]\big) \\ &= Dg(f(p))\big(Df(p)([\,c\,])\big). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Satz 3.2 *Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte und $p \in U$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Die Abbildung $D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^m$ ist definiert und bijektiv.*

(ii) *Ist $\psi : V \to \psi(V)$ eine weitere Karte mit $p \in V$, so gilt*

$$D\psi(p) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\, D\varphi(p).$$

(iii) *Es gibt eine eindeutig bestimmte Vektorraumstruktur auf T_pM, so dass die Abbildung $D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^m$ linear (und damit isomorph) ist.*

Beweis: Nach Beispiel 3.2 ist $D\varphi(p)$ gegeben durch

$$D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^m,\ D\varphi(p)([c]) = (\varphi \circ c)'(0).$$

Genau genommen haben wir das Differential nur für C^1-Funktionen auf ganz M definiert. Aber die C^1-Eigenschaft mittels Kartendarstellungen lässt sich offensichtlich auf Abbildungen $f : \Omega \to N$ mit $\Omega \subset M$ offen verallgemeinern, man nimmt nur Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $U \subset \Omega$; diese ergeben sich durch Einschränkung auf Ω. Insbesondere gilt hier $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, denn $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi(U)}$, vgl. Definition 2.1. Nach Definition des Tangentialvektors ist $D\varphi(p)$ injektiv. Für die Surjektivität setze $c_{x,v}(t) = x + tv$ mit $x = \varphi(p) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$, vgl. Beispiel 3.1. Dann ist $c = \varphi^{-1} \circ c_{x,v}$ eine C^1-Kurve wegen $\varphi \circ c = c_{x,v}$, und es gilt

$$D\varphi(p)([c]) = (\varphi \circ c)'(0) = c'_{x,v}(0) = v. \tag{3.4}$$

Damit ist Behauptung (i) gezeigt.

Behauptung (ii) wurde schon in (3.3) gezeigt, genauer hatten wir dort

$$(\psi \circ c)'(0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\,(\varphi \circ c)'(0).$$

Nach Beispiel 3.2 ist $(\psi \circ c)'(0) = D\psi(p)([c])$ und $(\varphi \circ c)'(0) = D\varphi(p)([c])$, und (ii) folgt.

Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte mit $p \in U$. Für $X, Y \in T_pM$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei eine Addition $X \oplus Y$ und eine Skalarmultiplikation $\lambda \odot X$ gegeben, so dass $D\varphi(p)$ linear ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} D\varphi(p)(X \oplus Y) &= D\varphi(p)(X) + D\varphi(p)(Y),\\ D\varphi(p)(\lambda \odot X) &= \lambda\, D\varphi(p)(X). \end{aligned}$$

Da $D\varphi(p)$ injektiv ist, sind $X \oplus Y$ und $\lambda \odot X$ hierdurch eindeutig bestimmt. Da $D\varphi(p)$ auch surjektiv ist, können wir umgekehrt $X \oplus Y$ und $\lambda \odot X$ durch die Gleichungen definieren. Man prüft nach, dass sich die Vektorraumaxiome von $\mathbb{R}^m$ auf T_pM übertragen. Das neutrale Element der Addition ist $0_p = D\varphi(p)^{-1}(0)$, es gilt $0_p = [c_0]$ mit $c_0(t) \equiv p$, die konstante Kurve. Das zu $X \in T_pM$ inverse Element bzgl. $\oplus$ ist $-X := D\varphi(p)^{-1}\big(-D\varphi(p)(X)\big)$. Ist $X = [c]$ so gilt $-X = [\hat{c}]$ mit $\hat{c}(t) = c(-t)$. Die Linearität von $D\varphi(p)$ gilt nach Definition. Es bleibt zu zeigen, dass die Definition nicht von der Karte abhängt. Ist $\psi : V \to \psi(V)$ eine andere Karte mit $p \in V$, so gilt nach (ii)

$$D\psi(p) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))D\varphi(p),$$

das heißt $D\psi(p)$ ist linear bezüglich der durch φ definierten Vektorraumstruktur. Wegen der Eindeutigkeit muss diese gleich der durch ψ definierten Struktur sein. □

Definition 3.3 *Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$, $x = \varphi(p)$, Karte auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Nach Satz 3.2 bilden dann die Vektoren*

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = D\varphi(p)^{-1} e_j \in T_pM \qquad \textit{mit } j = 1, \ldots, n$$

eine Basis von T_pM, die als Standardbasis bzgl. der Karte φ bezeichnet wird. Der Vektor $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ wird durch die Kurve $\varphi^{-1} \circ c_{x,e_j}$ repräsentiert, wobei $c_{x,e_j}(t) = x + te_j$.

Die letzte Aussage gilt wegen

$$D\varphi(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = e_j \quad \text{und} \quad D\varphi(p)[\varphi^{-1}\circ c_{x,e_j}] = (\varphi\circ\varphi^{-1}\circ c_{x,e_j})'(0) = e_j.$$

Wir bezeichnen die Basisvektoren stets mit den Buchstaben der entsprechenden Koordinaten, zum Beispiel sind $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ die Basisvektoren zu den Polarkoordinaten r, θ, φ auf $\mathbb{R}^3$. Bei dieser Notation muss allerdings klar sein, bezüglich welcher Karte φ die Standardbasis gebildet wird. In Folgerung **??** wird erklärt, warum die Basisvektoren als partielle Ableitungen geschrieben werden.

Beispiel 3.3 Ein C^1-Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen U, V im $\mathbb{R}^n$ kann als Karte aufgefasst werden. Setzen wir $f = \varphi^{-1}$, so lautet die zugehörige Standardbasis im Punkt $p \in U$ gemäß Definition 3.3

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = Df(\varphi(p))e_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}(\varphi(p)).$$

Insbesondere erhalten wir für $f = \mathrm{id}_U$ die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$. Im allgemeinen werden die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ aber von p abhängen. Im Fall der Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} f : (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3\backslash\{(x,y,z) : x \geq 0,\, y = 0\},\\ f(r,\theta,\varphi) &= (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta). \end{aligned}$$

Die Standardbasis bezüglich φ im Punkt $p = f(r,\theta,\varphi)$ lautet somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(p) &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),\\ \frac{\partial}{\partial \theta}(p) &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta),\\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(p) &= (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0). \end{aligned}$$

Als Funktion von $p = (x,y,z)$ erhalten wir für die Basis

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(p) &= \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \frac{\partial}{\partial \theta}(p) &= \frac{(zx, zy, -(x^2+y^2))}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(p) &= (-y, x, 0). \end{aligned}$$

Folgerung 3.1 *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $X \in T_pM$. Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$, mit $\varphi(p) = x$ hat X die Koordinatendarstellung*

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \quad \textit{mit } X^i = D\varphi^i(p)X. \tag{3.5}$$

Ist $\psi : V \to \psi(V)$, $\psi(p) = y$, eine weitere Karte, so transformieren sich die Koordinatenvektoren mit der Jacobimatrix des Kartenwechsels:

$$X_\psi = D(\psi\circ\varphi^{-1})(x)X_\varphi \quad \textit{und} \quad \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}(x)\,\frac{\partial}{\partial y^i}(p). \tag{3.6}$$

Beweis: Die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, $1 \leq i \leq n$, bilden eine Basis von T_pM, also gilt die Darstellung für gewisse $X^i \in \mathbb{R}$. Wir berechnen mit $X = [c]$

$$\sum_{i=1}^n X^i e_i = D\varphi(p)X = (\varphi \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^n (\varphi^i \circ c)'(0)\, e_i = \sum_{i=1}^n \big(D\varphi^i(p)X\big)\, e_i.$$

Die erste Behauptung folgt durch Koeffizientenvergleich. Weiter gilt

$$X_\psi = D\psi(p)X = D(\psi \circ \varphi^{-1})(x) D\varphi(p)X = D(\psi \circ \varphi^{-1})(x) X_\varphi.$$

Die Formel für die Basisvektoren ergibt sich mit $X = \frac{\partial}{\partial x^j}(p)$, den dann ist $X_\varphi = e_j$. $\square$

Satz 3.3 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m und $f \in C^1(M,N)$. Dann ist die Abbildung $Df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ linear. Sind $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ und $\psi : V \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ Karten mit $p \in U$ und $f(U) \subset V$, so gilt*

$$D\psi(f(p)) Df(p) (D\varphi(p))^{-1} = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)). \tag{3.7}$$

Bezüglich $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$, $j = 1, \ldots, n$, bzw. $\frac{\partial}{\partial y^i}(f(p))$, $i = 1, \ldots, m$ hat $Df(p)$ die Matrix

$$\left(\frac{\partial(\psi^i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right)(\varphi(p)) \in \mathbb{R}^{m \times n}. \tag{3.8}$$

Beweis: Formel (3.7) folgt aus der Kettenregel, Satz 3.1. Beachte dabei

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_U \quad \Rightarrow \quad D\varphi(p) D(\varphi^{-1})(\varphi(p)) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}.$$

$D\varphi(p)$ und $D\psi(f(p))$ sind Vektorraum-Isomorphismen, und $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ ist die gewöhnliche Ableitung, vgl. Beispiel 3.2. Damit ist auch $Df(p)$ linear. Für die zugehörige Matrix berechnen wir

$$\begin{aligned}
Df(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p) &= D\psi(f(p))^{-1} D\psi(f(p)) Df(p) D\varphi(p)^{-1} e_j \\
&= D\psi(f(p))^{-1} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\, e_j \\
&= D\psi(f(p))^{-1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\psi^i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p))\, e_i \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\psi^i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p))\, \frac{\partial}{\partial y^i}(f(p)).
\end{aligned}$$

$\square$

In der Physik ist es üblich, eine Funktion in Koordinaten zu schreiben. Die Koordinaten und die zugehörigen Komponenten der Funktion werden mit demselben Buchstaben bezeichnet. In der Situation hier ergibt sich die Notation $f^i(p) := \psi^i \circ f(p)$. Die Matrix von $Df(p)$ hat dann die Einträge

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) := \frac{\partial(\psi^i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)). \tag{3.9}$$

Es kann dann gerechnet werden wie es mit partiellen Ableitungen üblich ist. Das ist ziemlich praktisch, im Kapitel über die Lieklammer werden wir das zum Beispiel benutzen.

Beispiel 3.4 Wir betrachten hier den Spezialfall einer C^1-Kurve $\gamma : I = (a,b) \to M$. Bezüglich der Karte $\varphi = \mathrm{id}_I$ haben wir den Basisvektor

$$\frac{\partial}{\partial t}(t_0) = 1 \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor ist durch $c_{t_0,1}(t) = t_0 + t$ repräsentiert, denn $c'_{t_0,1}(t_0) = 1$. Für $f \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ berechnen wir nach Beispiel 3.2

$$Df(t_0)\frac{\partial}{\partial t}(t_0) = (f \circ c_{t_0,1})'(t_0) = \frac{d}{dt} f(t_0 + t)|_{t=t_0} = f'(t_0).$$

Wir definieren nun den Tangentialvektor von γ in t_0 durch

$$\gamma'(t_0) := D\gamma(t_0)\frac{\partial}{\partial t}(t_0).$$

Damit folgt in einer Karte $\psi : V \to \psi(V)$ von M mit der Kettenregel

$$D\psi(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = D\psi(\gamma(t_0))D\gamma(t_0)\frac{\partial}{\partial t}(t_0) = D(\psi \circ \gamma)(t_0)\frac{\partial}{\partial t}(t_0) = (\psi \circ \gamma)'(t_0).$$

Beispiel 3.5 Sei N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. $M \subset N$ heißt m-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞, wenn es zu jedem $p \in M$ eine M-adaptierte Karte $g : W \to g(W)$ von N gibt mit $p \in W$, das heißt

$$g(M \cap W) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap g(W). \tag{3.10}$$

M ist mit der Relativtopologie ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Um einen Atlas zu definieren, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} &\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, \quad \iota(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0),\\ &\pi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m, \quad \pi(y^1, \ldots, y^n) = (y^1, \ldots, y^m). \end{aligned}$$

Für eine M-adaptierte Karte $g : W \to g(W)$ setzen wir nun

$$\varphi_g : U_g := M \cap W \to \varphi_g(U_g),\ \varphi_g = \pi \circ g|_{M \cap W}.$$

Dann gilt $\varphi_g^{-1} = f \circ \iota|_{\varphi_g(U_g)}$, wobei $f = g^{-1} : g(W) \to W$ die Umkehrabbildung der Karte g bezeichnet. Insbesondere ergeben sich die Kartenwechsel

$$\begin{aligned} \varphi_{g'} \circ \varphi_g^{-1}|_{\varphi_g(U_g \cap U_{g'})} :\ & g(M \cap W \cap W') \to g'(M \cap W \cap W'),\\ \varphi_{g'} \circ \varphi_g^{-1}\ & = \pi \circ (g' \circ g^{-1}) \circ \iota|_{g(M \cap W \cap W')}. \end{aligned}$$

Damit ist auf M ein differenzierbarer Atlas gegeben. Die Inklusionsabbildung $i : M \subset N$ ist bezüglich dieser Struktur differenzierbar, denn in den Karten gilt

$$g \circ i \circ \varphi_g^{-1} = \iota|_{(\pi \circ g)(M \cap W)} \in C^\infty(\varphi_g(U_g)).$$

Aus $i = f \circ \iota \circ \varphi_g$ auf $M \cap W$ folgt $Di(p) = Df(g(p)\, \iota\, D\varphi_g(p)$ für $p \in M \cap W$. Somit ist die lineare Abbildung

$$Di(p) : T_pM \to \operatorname{Bild} Df(x,0)|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}} \subset T_pN, \qquad \text{wobei } x = \varphi_g(p) = (\pi \circ g)(p),$$

ein Isomorphismus. Die Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x^j}(p) \in T_pM$ bzgl. der Karte φ_g werden mit den Vektoren $Df(x,0)(e_j, 0) \in T_pN$ mit $j = 1, \ldots, m$ identifiziert.

4 Tangentialbündel und Vektorfelder

Wir wollen nun die Tangentialräume T_pM, $p \in M$, zu einem Gesamtobjekt zusammenfassen; dieses ist das Tangentialbündel

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Natürlich soll TM auch wieder eine Mannigfaltigkeit sein. Allerdings ist TM eine Vereinigung von Vektorräumen, die sozusagen durch $p \in M$ parametrisiert sind. Es ist sinnvoll, hier folgenden Begriff einzuführen.

Definition 4.1 (Vektorbündel) *Seien E und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $\pi \in C^\infty(E, M)$ heißt Vektorbündel vom Rang k über M, falls gilt:*

(i) *Für alle $p \in M$ trägt $E_p = \pi^{-1}\{p\}$ die Struktur eines k-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums.*

(ii) *Für alle $p \in M$ existiert eine Umgebung $U \subset M$ und ein Diffeomorphismum der Form*

$$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k, \quad \phi(v) = \big(q, A(q)v\big) \text{ mit } q = \pi(v),$$

wobei $A(q) : E_q \to \mathbb{R}^k$ ein Vektorraumisomorphismus ist.

Hat man einmal einen Vektorraum V, so konstruiert die Lineare Algebra daraus weitere Vektorräume, etwa den Dualraum V^* oder den Raum $\mathrm{End}(V)$ der Endomorphismen von V. In unserer Situation ergeben sich so weitere Vektorbündel, das ist der Grund diesen Begriff allgemein einzuführen. Ich habe die Eigenschaft (ii) in die Definition aufgenommen (manche Autoren machen das nicht). Das Bündel $\pi : M \times \mathbb{R}^k$, $\pi(p, v) = p$, heißt das triviale Bündel. Eigenschaft (ii) besagt, dass das Bündel *lokal trivial* ist, also ein Produkt $U \times \mathbb{R}^k$. Allgemein heißt ϕ in (ii) Bündelkarte oder lokale Trivialisierung.

Lemma 4.1 *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit maximalem Atlas $\mathcal{A}$ und Projektion $\pi : TM \to M$, $\pi(X) = p$ für $X \in T_pM$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Topologie auf TM, so dass die Abbildungen*

$$\varphi_\sharp : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n,\ \varphi_\sharp(X) = \big(\varphi(p), D\varphi(p)X\big) \text{ für } X \in T_pM \quad (\varphi \in \mathcal{A}) \tag{4.1}$$

einen C^∞-Atlas bilden. Damit ist TM eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, und die Projektion $\pi : TM \to M$ ist in $C^\infty(TM, M)$.

Beweis: Wir wollen Satz 1.2 anwenden. Die Abbildungen $\varphi_\sharp$ sind bijektiv, das Bild $\varphi(U)\times\mathbb{R}^n$ ist offen und die Mengen $\pi^{-1}(U)$, $\varphi \in \mathcal{A}$, überdecken TM. Für zwei Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ ist die Menge

$$\varphi_\sharp(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Weiter ist der Kartenwechsel nach Satz 3.2(ii) stetig:

$$\begin{aligned} \psi_\sharp \circ (\varphi_\sharp)^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n &\to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n, \\ (\psi_\sharp \circ (\varphi_\sharp)^{-1})(x, v) &= \big((\psi \circ \varphi^{-1})(x), D(\psi \circ \varphi^{-1})(x)v\big). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2 gibt es auf TM genau eine Topologie, so dass die $\varphi_\sharp$ homemorph sind und damit einen C^∞-Atlas von TM bilden, es gilt

$$W \subset TM \text{ offen} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_\sharp(W \cap \pi^{-1}(U)) \text{ offen für alle } \varphi \in \mathcal{A}.$$

Die Projektion $\pi : TM \to M$ ist C^∞, denn es gilt

$$\varphi \circ \pi \circ (\varphi_\sharp)^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \varphi(U),\ \pi(x,v) = x.$$

Nach Satz 1.1(3) hat M einen abzählbaren Atlas $\mathcal{A}'$, und TM wird durch die Mengen $\pi^{-1}(U_\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{A}'$, überdeckt. Somit hat TM eine abzählbare Basis nach Satz 1.2.

Zu zeigen bleibt die Hausdorff-Eigenschaft. Seien $X, Y \in TM$ mit $X \neq Y$. Ist $\pi(X) \neq \pi(Y)$, so gibt es offene Umgebungen $U, V \subset M$ von $\pi(X)$ bzw. $\pi(Y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Die Mengen $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ sind dann disjunkte, offene Umgebungen von X bzw. Y. Im Fall $\pi(X) = \pi(Y) =: p$ wähle eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$. Es gilt dann $D\varphi(p)X = v$ und $D\varphi(p)Y = w$ mit $v \neq w$. Wähle offene und disjunkte Umgebungen $V, W \subset \mathbb{R}^n$ von v, w. Dann sind $\varphi_\sharp^{-1}(U \times V)$ und $\varphi_\sharp^{-1}(U \times W)$ wie verlangt. □

Wir hatten nach Satz 1.1 die Konvergenz einer Folge von Punkten in einer Mannigfaltigkeit charakterisiert. Das besagt hier Folgendes:

> Seien $X_k \in T_{p_k}M$, $X \in T_pM$, und sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte mit $p \in U$. Dann konvergiert X_k genau dann gegen X, wenn $p_k \to p$, insbesondere $p_k \in U$ für k groß, und $(X_k)^i \to X^i$ mit $k \to \infty$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dabei sind $(X_k)^i$ und X^i die Koordinaten bzgl. der Basen $\frac{\partial}{\partial x^i}(p_k)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$.

Satz 4.1 (Tangentialbündel) *Für eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist $\pi : TM \to M$ ein n-dimensionales Vektorbündel vom Rang n.*

Beweis: Sei $p \in M$ und $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte mit $p \in M$. Nach Satz 3.2 hat T_pM eine eindeutig bestimmte Vektorraumstruktur, so dass $D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n$ linear ist. Wir haben die Diffeomorphismen

$$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n,\ \phi(X) = (q, D\varphi(q)X) \quad \text{für } q = \pi(X) \in U.$$

□

Folgerung 4.1 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Ist $f \in C^k(M,N)$ mit $k \geq 1$, so ist $Df \in C^{k-1}(TM, TN)$.*

Beweis: Seien $\varphi : U \to \varphi(U)$ bzw. $\psi : V \to \psi(V)$ Karten von M bzw. N mit $f(U) \subset V$. Dann gilt für $x \in \varphi(U)$ und $v \in \mathbb{R}^m$ nach Satz 3.3

$$\psi_\sharp \circ Df \circ (\varphi_\sharp)^{-1}(x,v) = \big((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x)v\,\big) \in \psi(V) \times \mathbb{R}^n.$$

Die Behauptung folgt. □

Definition 4.2 *Ein Vektorfeld auf M ist eine Abbildung $X : M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, also $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Wir bezeichnen den Raum der C^k-Vektorfelder mit $C^k(TM)$.*

Die C^k-Eigenschaft ist durch die Darstellungen bezüglich Karten definiert. Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte, so lauten die lokalen Darstellungen von X nach Lemma 4.1

$$\varphi_\sharp \circ X \circ \varphi^{-1}(x) = (\varphi(p), X^1(p), \ldots, X^n(p))|_{p=\varphi^{-1}(x)} \quad \text{mit } X^i(p) = D\varphi^i(p)X.$$

Damit ist $X \in C^k(M, TM)$ genau wenn für jede Karte die $X^i \circ \varphi^{-1}$ in $C^k(\varphi(U))$ sind.

Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel. Eine Funktion $X : M \to E$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, das heißt $X(p) \in E_p$ für alle $p \in M$, nennt man einen Schnitt von E. Die Differentialgeometer bezeichnen die C^∞-Schnitte mit $\Gamma(E)$. Diese Notation hat den Nachteil, dass sie andere Regularitätsstufen, zum Beispiel stetige oder C^1-Schnitte, nicht abdeckt. Ich bezeichne deshalb die C^k-Schnitte von E mit $C^k(E)$. Nachteil meiner Notation ist natürlich die Verwechselung mit dem Raum der C^k-Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$. Ich hoffe dass sich aus dem Kontext ergibt was gemeint ist.

$C^k(TM)$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der punktweisen Vektorraumstruktur, vgl. Satz 3.2,

$$(\lambda X + \mu Y)(p) = \lambda X(p) + \mu Y(p).$$

Ferner können Vektorfelder mit Funktionen multipliziert werden:

$$f \in C^k(M),\, X \in C^k(TM) \quad \Rightarrow \quad fX \in C^k(TM), \text{ wobei } (fX)(p) = f(p)X(p).$$

Definition 4.3 *Die Basisfelder einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$, $x = \varphi(p)$, sind*

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \in C^\infty(TU) : p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = D\varphi(p)^{-1} e_j.$$

Ein Vektorfeld X auf M hat bezüglich der Basisfelder die Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{mit } X^i(p) = D\varphi^i(p)X.$$

Definition 4.4 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (evtl. uneigentliches) Intervall. $c \in C^1(I, M)$ heißt Integralkurve des Vektorfelds $X \in C^0(TM)$, falls gilt:*

$$c' = X \circ c \quad \Leftrightarrow \quad c'(t) = X(c(t)) \text{ für alle } t \in I. \tag{4.2}$$

c heißt maximal, wenn es keine Integralkurve $\tilde{c} : \tilde{I} \to M$ gibt mit $I \subsetneq \tilde{I}$ und $\tilde{c}|_I = c$.

Genauer könnte man auch die Begriffe rechts- bzw. linksseitig maximal erklären. Wir interessieren uns nun zuerst dafür, wie sich die Gleichung in lokale Koordinaten übersetzt.

Lemma 4.2 *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $X \in C^0(TM)$ ein Vektorfeld auf M, mit lokaler Darstellung $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ bezüglich der Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$. Definiere*

$$\xi \in C^0(U, \mathbb{R}^n),\, \xi(x) = D\varphi(p)X(p)|_{p=\varphi^{-1}(x)} = \sum_{i=1}^n X^i(\varphi^{-1}(x))\, e_i.$$

$c \in C^1(I, U)$ ist genau dann Integralkurve von X, wenn für $\gamma(t) = \varphi(c(t))$ gilt:

$$\gamma' = \xi \circ \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \gamma'(t) = \xi(\gamma(t)) \text{ für alle } t \in I. \tag{4.3}$$

Beweis: Nach Beispiel 3.4 gilt, links mit der Standard Ableitung,

$$\gamma'(t) = (\varphi \circ c)'(t) = D\varphi(c(t))c'(t).$$

Andererseits gilt nach Definition wegen $\varphi^{-1}(\gamma(t)) = c(t)$

$$\xi(\gamma(t)) = D\varphi(c(t))X(c(t)).$$

Die Behauptung folgt. □

Gleichung (4.3) ist ein autonomes System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die relevante Theorie im $\mathbb{R}^n$ liefert folgende Aussagen zur Eindeutigkeit und Existenz von Integralkurven, sowie zur Abhängigkeit der Integralkurve vom Anfangswert.

Satz 4.2 *Sei $X \in C^1(TM)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Sind $c_k : I_k \to M$ Integralkurven von X mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$, so gilt $c_1 = c_2$ auf $I_1 \cap I_2$ und die zusammengesetzte Kurve*

$$c : I_1 \cup I_2 \to M,\, c(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{für } t \in I_1 \\ c_2(t) & \text{für } t \in I_2 \end{cases}$$

ist wieder eine Integralkurve von X.

(ii) *Zu jedem $p \in M$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem $c'(t) = X(c(t))$, $c(0) = p$, eine Lösung $c_p : (-\delta, \delta) \to M$ hat.*

(iii) *Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung U und ein $\delta > 0$, so dass die Abbildung*

$$\phi : U \times (-\delta, \delta) \to M,\, \phi(q,t) = c_q(t),$$

definiert und C^1 ist. Ist $X \in C^k(TM)$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist ϕ eine C^k-Abbildung.

Beweis: Für (i) betrachte die Menge $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : c_1(t) = c_2(t)\}$. Nach Definition ist J abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$ und nach Voraussetzung nicht leer, da $t_0 \in J$. Aber J ist auch offen in $I_1 \cap I_2$; dies folgt durch Anwendung des Eindeutigkeitssatzes im $\mathbb{R}^n$ in einer lokalen Karte gemäß Lemma 4.2. Also gilt $J = I_1 \cap I_2$, das heißt die Lösungen stimmen auf $I_1 \cap I_2$ überein. Die Lösungseigenschaft der zusammengesetzten Kurve ist offensichtlich. Die Behauptungen (ii) und (iii) sind direkte Konsequenzen der entsprechenden Aussagen im $\mathbb{R}^n$ zusammen mit Lemma 4.2. □

Ist nur $X \in C^0(TM)$, so gilt das Eindeutigkeitsresultat im allgemeinen nicht. Betrachte dazu die Gleichung $\gamma' = \sqrt{|\gamma|}$ für $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gibt eine Schar von C^1-Lösungen mit $\gamma(0) = 0$, die von zwei Parametern $t_1 \leq 0$, $t_2 \geq 0$ abhängt:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - t_1)^2 & t \leq t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \frac{1}{4}(t - t_2)^2 & t \geq t_2. \end{cases}$$

Ein Beispiel dafür, dass die Integralkurven nicht immer auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden können, liefert die Gleichung $\gamma' = \gamma^2$. Die maximale Integralkurve mit $\gamma(0) = x_0 \neq 0$ lautet

$$\gamma(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \text{ mit } \begin{cases} t \in (-\infty, \frac{1}{x_0}) & \text{falls } x_0 > 0, \\ t \in (\frac{1}{x_0}, \infty) & \text{falls } x_0 < 0. \end{cases}$$

Folgerung 4.2 *Sei $X \in C^1(TM)$. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine maximale Integralkurve $c_p : I_p \to M$ von X mit $c_p(0) = p$, und es gilt:*

(i) *$I_p = (\alpha_p, \omega_p)$ ist ein offenes Intervall mit $-\infty \leq \alpha_p < 0 < \omega_p \leq \infty$.*

(ii) *Ist $c : I \to M$ Integralkurve von X mit $c(0) = p$, so gilt $I \subset I_p$ und $c = c_p|_I$.*

(iii) *Zu $K \subset M$ kompakt gibt es ein $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \subset (\alpha_p, \omega_p)$ für alle $p \in K$.*

Beweis: Wir setzen

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \inf\{a < 0 : \text{ es gibt eine Integralkurve } c : (a, 0] \to M \text{ mit } c(0) = p\},\\ \omega_p &= \sup\{b > 0 : \text{ es gibt eine Integralkurve } c : [0, b) \to M \text{ mit } c(0) = p\}.\end{aligned}$$

Nach Satz 4.2(ii) gilt $\alpha_p < 0 < \omega_p$, und mit Satz 4.2(i) erhalten wir eine wohldefinierte Lösung $c_p : (\alpha_p, \omega_p) \to M$ des Anfangswertproblems. Wäre c_p zum Beispiel auf $(\alpha_p, \omega_p]$ fortsetzbar, so gibt es nach Satz 4.2(ii) für geeignetes $\delta > 0$ eine Integralkurve $c : (\omega_p - \delta, \omega_p + \delta) \to M$ mit $c(\omega_p) = c_p(\omega_p)$, und wir erhalten eine Fortsetzung von c_p auf das Intervall $(\alpha_p, \omega_p + \delta)$ im Widerspruch zur Definition von ω_p. Also ist $c_p : I_p = (\alpha_p, \omega_p) \to M$ maximale Integralkurve. Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich aus Satz 4.2(i) und der Maximalität. Schließlich ergibt sich Behauptung (iii) aus Satz 4.2(iii) mit einem Überdeckungsargument. □

Folgerung 4.3 *Sei $c_p : (\alpha_p, \omega_p) \to M$ die maximale Integralkurve von $X \in C^1(TM)$ mit Anfangswert $c_p(0) = p$. Gilt dann $\omega_p < \infty$ (bzw. $\alpha_p > -\infty$), so gibt es zu $K \subset M$ kompakt ein $t^K < \omega_p$ (bzw. $t_K > \alpha_p$), so dass gilt:*

$$c_p(t) \notin K \text{ für alle } t > t^K \quad (\text{ bzw. } c_p(t) \notin K \text{ für alle } t < t_K).$$

Hat X kompakten Träger auf M, so gilt $(\alpha_p, \omega_p) = (-\infty, \infty)$.

Beweis: Sei $\omega_p < \infty$. Dann gilt $\omega_{c_p(t)} = \omega_p - t \searrow 0$ mit $t \nearrow \omega_p$. Folgerung 4.2(iii) liefert $c_p(t) \notin K$ für t hinreichend groß. Wäre $\omega_p < \infty$ im Fall $K := \operatorname{spt} X$ kompakt, so folgt $c_p(t) \notin K$ für $t > t_K$, also $c_p'(t) = X(c_p(t)) = 0$ für $t > t^K$. Aber dann ist $c_p(t)$ konstant für $t > t^K$, und wir können die Lösung konstant auf (t^K, ∞) fortsetzen, im Widerspruch zur Annahme. □

Definition 4.5 *Für $X \in C^1(TM)$ sei $c_p : I_p \to M$ die maximale Integralkurve mit $c_p(0) = p$, und $M^X = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} : t \in I_p\}$. Der Fluss von X ist die Abbildung*

$$\phi : M^X \to M,\ \phi(p, t) = c_p(t).$$

Wir setzen $M_t^X = \{p \in M : t \in I_p\}$ und $\phi_t : M_t^X \to M$, $\phi_t(p) = c_p(t)$.

Lemma 4.3 *Sei ϕ der Fluss von $X \in C^1(TM)$. Sind $t, s + t \in I_p$, so folgt $s \in I_{\phi(p,t)}$ und*

$$(\phi_s \circ \phi_t)(p) = \phi_{s+t}(p). \tag{4.4}$$

Beweis: Da I_p Intervall, gilt:

$$\begin{aligned}&\text{im Fall } s > 0 : \quad \sigma + t \in I_p \quad \text{für } \sigma \in [0, s] =: I,\\ &\text{im Fall } s < 0 : \quad \sigma + t \in I_p \quad \text{für } \sigma \in [s, 0] =: I.\end{aligned}$$

Wir berechnen für $\sigma \in I$

$$\frac{d}{d\sigma} c_p(\sigma + t) = (c_p)'(\sigma + t) = X(c_p(\sigma + t)) \quad \text{und} \quad c_p(\sigma + t)|_{\sigma=0} = c_p(t) = \phi(p, t).$$

Es folgt $s \in I_{\phi(p,t)}$ und $(\phi_s \circ \phi_t)(p) = c_p(s + t) = \phi_{s+t}(p)$. $\square$

Folgerung 4.4 *Sei $X \in C^k(TM)$. Der Fluss $\phi : M^X \to M$ hat folgende Eigenschaften:*

(i) *Die Mengen $M^X \subset M \times \mathbb{R}$ sowie $M_t^X \subset M$ sind offen.*

(ii) *$\phi : M^X \to M$ ist von der Klasse C^k.*

(iii) *$\phi_t : M_t^X \to M_{-t}^X$ ist ein C^k-Diffeomorphismus.*

Beweis: Sei G die Menge aller Punkte $(p, t) \in M^X$ mit folgender Eigenschaft: es gibt eine offene Umgebung $W \subset M \times \mathbb{R}$ von (p, t) mit $W \subset M^X$ und $\phi|_W \in C^k(W, M)$. Wir zeigen $G = M^X$, und damit die Behauptungen (i) und (ii). Beachte dabei: M_t^X offen folgt aus M^X offen, denn $M_t^X = i_t^{-1}(M^X)$ mit $i_t(p) = (p, t)$. Im folgenden sei $(p, T) \in M^X$ vorgegeben, ohne Einschränkung mit $T > 0$.

Schritt 1: Es gibt $U \supset c_p([0, T])$ offen und $\delta > 0$ mit $U \times (-\delta, \delta) \subset G$.
Nach Satz 4.2 gibt es zu jedem $t \in [0, T]$ eine Umgebung U_t von $c_p(t)$ und ein $\delta_t > 0$ mit $U_t \times (-\delta_t, \delta_t) \subset G$. Da $c_p([0, T])$ kompakt, wird es durch U_{t_i}, $i = 1, \ldots, N$,überdeckt. Wir setzen $U = \bigcup_{i=1}^N U_{t_i}$ und $\delta = \min_{i=1,\ldots,N} \delta_{t_i} > 0$. Es folgt

$$U \times (-\delta, \delta) \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_{t_i} \times (-\delta_{t_i}, \delta_{t_i}) \subset G.$$

Schritt 2: Setze $\tau = \sup\{t \geq 0 : \{p\} \times [0, t] \subset G\}$. Dann ist $\tau > T$ und somit $(p, T) \in G$.
Nach Schritt 1 ist $p = c_p(0) \in U$, also $\{p\} \times [0, \delta) \subset G$ und damit $\tau \geq \delta > 0$. Angenommen es ist $\tau \leq T$. Für $t \in [0, \tau) \subset [0, T)$ gilt $(p, t) \in G$, also gibt es eine offene Umgebung V von p mit $V \times \{t\} \subset G$ und $\phi_t \in C^k(V, M)$. Es gilt $\phi_t(p) = c_p(t) \in U$. Nach Verkleinerung von V ist sogar $\phi_t(V) \subset U$. Definiere nun die C^k-Abbildung

$$\psi : V \times [t, t + \delta) \to M,\ \psi(q, s) = \phi(\phi_t(p), s - t).$$

$\psi(q, s)$ ist Integralkurve mit Anfangswert $\psi(q, t) = \phi_t(p)$, also haben wir eine C^k Fortsetzung von ϕ auf $V \times [0, t + \delta)$, und damit $\{p\} \times [0, t + \delta) \subset G$. Nach Definition von τ ist dann $t + \delta \leq \tau$, mit $t \nearrow \tau$ folgt $\delta \leq 0$, Widerspruch.

Beweis von (iii): Sei $p \in M_t^X$, also $t \in I_p$. Nach Lemma 4.3 gilt dann $-t \in I_{\phi_t(p)}$ bzw. $\phi_t(p) \in M_{-t}^X$, und $\phi_{-t}(\phi_t(p)) = p$. Da t und $-t$ vertauscht werden können, ist ϕ_t bijektiv. Außerdem gilt $\phi_t = \phi \circ i_t$ auf M_t^X, somit ist ϕ_t ein C^k-Diffeomorphismus. $\square$

Ist das Vektorfeld $X \in C^1(TM)$ vollständig integrierbar, das heißt alle Flusskurven sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, so liefert der Fluss die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}\,(M),\ t \mapsto \phi_t, \qquad \text{mit } \phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t};$$

das ist die von X erzeugte Einparametergruppe von Diffeomorphismen von M.

Lemma 4.4 *Sei $X \in T_pM$ mit $Df(p)X = 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$. Dann folgt $X = 0$.*

Beweis: Wähle eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$. Für $i = 1, \ldots, n$ gibt es Funktionen $\widetilde{\varphi}^i \in C^\infty(M)$ mit $\widetilde{\varphi}^i = \varphi^i$ nahe bei p (verwende eine Abschneidefunkion). Nach Definition der Ableitung gilt dann $D\varphi^i(p) = D\widetilde{\varphi}^i(p)$, also folgt

$$X^i = D\varphi^i(p)X = D\widetilde{\varphi}^i(p)X = 0.$$

$\square$

Vektorfelder $X \in C^0(TM)$ operieren auf Funktionen $f \in C^1(M)$ durch Richtungsableitung. In diesem Zusammenhang ist folgende Notation üblich:

$$Xf : M \to \mathbb{R},\ Xf(p) = Df(p)X(p).$$

Satz 4.3 (Lieklammer) *Seien $X, Y \in C^k(TM)$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes C^{k-1}-Vektorfeld, die Lieklammer $[X, Y]$ von X und Y, so dass gilt:*

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad \text{für alle } f \in C^\infty(M). \tag{4.5}$$

Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ hat $[X, Y]$ die Koordinatendarstellung

$$\sum_{i,j=1}^n \big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\big) \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{4.6}$$

Beweis: Wir berechnen bzgl. einer lokalen Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$

$$X(Yf) = \sum_{i,j=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\big) = \sum_{i,j=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Nach Schwarz heben sich die zweiten Ableitungen beim Kommutator weg, es folgt

$$X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^n \big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\big) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Wir definieren das Vektorfeld $[X, Y] \in C^{k-1}(TU)$ durch (4.6), auf U gilt dann die gewünschte Eigenschaft (4.5). Die Definitionen bezüglich zweier Karten stimmen überein, denn das Differenzvektorfeld ist Null nach Lemma 4.4. Also erhalten wir ein global definiertes Vektorfeld $[X, Y] \in C^{k-1}(TM)$. $\square$

Lemma 4.5 *Für Vektorfelder $X, Y, Z \in C^k(TM)$ mit $k \geq 1$ gilt:*

(i) $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Y] + \mu[Y, Z]$ *für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) $[X, Y] = -[Y, X]$.

(iii) $\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0$, *falls* $k \geq 2$.

(iii) *Für die Basisfelder einer Karte ist* $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

Beweis: Die Aussagen folgen aus der Definition. Für (iii) berechnen wir mit $f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}\big[[X,Y],Z\big]f &= [X,Y]\,Zf - Z\,[X,Y]f \\ &= \underbrace{XYZf}_{\text{zyklisch}} - \underbrace{YXZf}_{\text{antizyklisch}} - \underbrace{ZXYf}_{\text{zyklisch}} + \underbrace{ZYXf}_{\text{antizyklisch}}\,.\end{aligned}$$

Also heben sich bei zyklischer Vertauschung und Addition alle Terme weg. Behauptung (iv) folgt aus dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. □

Bemerkung. Die Lieklammer ist nicht bilinear über $C^\infty(M)$, sondern es gilt

$$(4.7)\qquad [fX,Y] = f\,[X,Y] - (Yf)\,X \quad \text{bzw.} \quad [X,fY] = f[X,Y] + (Xf)Y.$$

Definition 4.6 *Seien M,N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f \in C^1(M,N)$. Das Vektorfeld $Y : N \to TN$ heißt f-verwandt zu dem Vektorfeld $X : M \to TM$, wenn gilt:*

$$Y \circ f = Df \cdot X \quad \Leftrightarrow \quad Y(f(p)) = Df(p)X(p) \text{ für alle } p \in M.$$

Lemma 4.6 *Sei $f \in C^2(M,N)$. Sind $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in C^1(TN)$ f-verwandt zu $X, Y \in C^1(TM)$, so ist $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ auch f-verwandt zu $[X,Y]$.*

Beweis: In Koordinaten reduziert sich die Sache auf den Fall $f \in C^2(U,V)$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es gilt $\tilde{X}(f(p)) = Df(p)X(p)$ und $\tilde{Y}(f(p)) = Df(p)Y(p)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}D(\tilde{Y} \circ f)(p)\,X(p) &= (D\tilde{Y})(f(p))\,Df(p)\,X(p) \\ &= (D\tilde{Y})(f(p))\,\tilde{X}(f(p)) \\ &= (D\tilde{Y} \cdot \tilde{X})(f(p)).\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$D(Df \cdot Y)(p)\,X(p) = Df(p)\,DY(p)\,X(p) + D^2 f(p)(X(p), Y(p)).$$

Durch Vertauschung und Subtraktion folgt, da $D^2 f(p)$ symmetrisch ist,

$$\begin{aligned}[\tilde{X}, \tilde{Y}](f(p)) &= (D\tilde{Y} \cdot \tilde{X})(f(p)) - (D\tilde{X} \cdot \tilde{Y})(f(p)) \\ &= Df(p)\big(DY(p)X(p) - DX(p)Y(p)\big) \\ &= Df(p)\,[X,Y](p).\end{aligned}$$

□

Was ist nun die geometrische Bedeutung der Lieklammer? Wir wollen zeigen, dass das Verschwinden der Lieklammer von zwei Vektorfeldern X,Y – man spricht dann von kommutierenden Vektorfeldern – gleichbedeutend damit ist, dass die zugehörigen Flüsse der Vektorfelder kommutieren. Dazu brauchen wir etwas Vorbereitung.

Lemma 4.7 *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $f \in C^1(M,N)$. Das Vektorfeld $Y : N \to TN$ sei f-verwandt zu $X : M \to TM$. Ist dann $c : I \to M$ Integralkurve von X, so ist $f \circ c : I \to N$ Integralkurve von Y.*

Beweis: $\frac{d}{dt}f(c(t)) = Df(c(t))c'(t) = Df(c(t))X(c(t)) = Y(f(c(t)))$. □

Zu gegebenem X und f muss kein f-verwandtes Feld Y existieren, zum Beispiel kann es Punkte $p_{1,2} \in M$ geben mit $f(p_1) = f(p_2)$, aber $Df(p_1)X(p_1) \neq Df(p_2)X(p_2)$. Auch ist ein f-verwandtes Feld nicht eindeutig bestimmt, es sei denn, f ist surjektiv. Ist $f \in C^1(M,N)$ aber ein Diffeomorphismus, so gibt es genau ein f-verwandtes Feld, nämlich den pushforward von X unter f.

Definition 4.7 *Sei $f \in C^1(M,N)$ ein Diffeomorphismus. Dann gibt es zu jedem Vektorfeld $X : M \to TM$ genau ein f-verwandtes Feld $Y : N \to TN$, Bezeichnung $Y = f_*X$, nämlich*

$$Y(q) = Df(p)X(p)|_{p=f^{-1}(q)}.$$

Für $f \in C^{k+1}(M,N)$ und $X \in C^k(TM)$ ist f_*X in $C^k(TN)$.

Sind $f \in C^1(M,N)$ und $g \in C^1(N,P)$ diffeomorph, so gilt $(g \circ f)_*X = g_*(f_*X)$, denn

$$(g \circ f)_*X((g \circ f)(p) = D(g \circ f)(p)X(p) = Dg(f(p))Df(p)X(p) = g_*(f_*X)(g(f(p))). \tag{4.8}$$

Lemma 4.8 *Sei $f \in C^2(M,N)$ ein Diffeomorphismus, $X \in C^1(TM)$ und $Y = f_*X$. Dann gilt für die zugehörigen Flüsse $N_t^Y = f(M_t^X)$ und $\psi_t \circ f = f \circ \phi_t$.*

Beweis: Nach Lemma 4.7 gilt für die Existenzintervalle $I_{f(p)} = I_p$ und damit

$$f(M_t^X) = f\big(\{p \in M : t \in I_p\}\big) \subset \{q \in N : t \in I_q\} = N_t^Y.$$

Aus Symmetriegründen folgt Gleichheit. Für $p \in M$ ist $f \circ \phi_t(p)$, $t \in I_p$, Integralkurve von Y mit $f \circ \phi_t(p)|_{t=0} = f(p)$, also $f \circ \phi_t(p) = \psi_t(f(p))$ für alle $t \in I_p = I_{f(p)}$. □

Satz 4.4 *Seien $X, Y \in C^2(TM)$ und $\phi : M^X \to M$ der Fluss von X. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((\phi_{-t})_*Y\big)(p)|_{t=0} = [X,Y](p). \tag{4.9}$$

Beweis: Nach Satz 4.2(iii) ist $\phi = \phi(x,t) \in C^2$ auf einer Umgebung von $(p,0)$. Wir berechnen, wobei D die x-Ableitung ist,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\big(D\phi_{-t}(\phi_t(p))Y(p)|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}D\phi(\phi_t(p),-t)Y(p) \\ &= D^2\phi(p,0)(X(p),Y(p)) - \partial_t D\phi(p,0)Y(p). \end{aligned}$$

Nun gilt $D^2\phi(p,0) = D^2\phi_0(p) = 0$, da $\phi_0(x) = x$. Aus $\partial_t\phi(\cdot,0) = X$ erhalten wir weiter $\partial_t D\phi(p,0) = D\partial_t\phi(p,0) = DX(p)$. Somit ergibt sich mit (4.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\big((\phi_{-t})_*Y(p)\big)|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\big(D\phi_{-t}(\phi_t(p))Y(\phi_t(p))\big)|_{t=0} \\ &= -DX(p)Y(p) + DY(p)X(p) \\ &= [X,Y](p). \end{aligned}$$

In einer beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M sieht die Sache zunächst kompliziert aus, denn die Ableitung einer Kurve in TM ist im allgemeinen ein Element von $T(TM)$.

Aber die Kurve in (4.9) verläuft in dem festen Vektorraum T_pM, denn Y wird in $\phi_t(p)$ ausgewertet und dann mit $D\phi_{-t}(\phi_t(p)) = D\phi_t(p)^{-1}$ nach T_pM zurück transportiert. Die Ableitung in (4.9) ist damit durch die Ableitung des Koordinatenvektors bezüglich einer Basis von T_pM gegeben.

Wähle eine Karte $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, und betrachte den Fluss ψ_t des Vektorfelds $\varphi_* X$ auf V. Nach Lemma 4.8 gilt $\psi_t \circ \varphi = \varphi \circ \phi_t$. Für ein Vektorfeld Z auf U und das zugehörigen Koordinatenfeld $Z^\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ haben wir

$$\varphi_* Z(x) = D\varphi(p)Z(p)|_{p=\varphi^{-1}(x)} = X^\varphi(\varphi^{-1}(x)).$$

Mit (4.8) berechnen wir nun

$$\big((\phi_{-t})_* Y\big)^\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi_*\big((\phi_{-t})_* Y\big) = (\psi_{-t})_*\, \varphi_*\, Y.$$

Aus dem Fall $M = V \subset \mathbb{R}^n$ und Lemma 4.6 folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\big((\phi_{-t})_* Y\big)^\varphi(p)|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}(\psi_{-t})_*(\varphi_* Y)(\varphi(p))|_{t=0}\\
&= [\varphi_* X, \varphi_* Y](\varphi(p))\\
&= \varphi_*[X,Y](\varphi(p))\\
&= [X,Y]^\varphi(p).
\end{aligned}$$

Die Behauptung ist allgemein bewiesen. □

Die folgende Aussage gilt auch wenn die Flüsse nicht aug ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert sind, der Einfachheit halber setzen wir das aber voraus.

Satz 4.5 *Die Vektorfelder $X, Y \in C^2(TM)$ seien vollständig integrierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $[X,Y] = 0$ *auf* M.

(ii) $\phi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_s$, *wobei* ϕ_s, ψ_t *die Flüsse von* X *bzw.* Y *sind.*

Beweis: Wir zeigen zuerst (ii) $\Rightarrow$ (i). Und zwar folgt für $p \in M$ durch sukzessive Anwendung von $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$ und $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}$, wobei Satz 4.4 benutzt wird:

$$\begin{aligned}
(\phi_{-t} \circ \psi_s \circ \phi_t)(p) = \psi_s(p) \quad &\Rightarrow \quad D\phi_{-t}(\phi_t(p))Y(\phi_t(p)) = Y(p)\\
&\Rightarrow \quad [X,Y](p) = 0.
\end{aligned}$$

Umgekehrt berechnen wir $t = t_0 + s$, also $\phi_{-t} = \phi_{-t_0} \circ \phi_{-s}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\big((\phi_{-t})_* Y)(p)\big)|_{t=t_0} &= \frac{\partial}{\partial s}\big((\phi_{-(t_0+s)})_* Y(p)\big)|_{s=0}\\
&= (\phi_{-t_0})_* \frac{\partial}{\partial s}\big(\phi_{-s})_* Y(p)\big)|_{s=0}\\
&= (\phi_{-t_0})_*[X,Y](p)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also ist $(D\phi_{-t} \cdot Y)(\phi_t(p)) = Y(p)$ für alle (p,t). Betrachte nun für $t \in \mathbb{R}$ fest die Kurve $c(s) := (\phi_{-t} \circ \psi_s \circ \phi_t)(p)$. Es gilt $c(0) = p$ und

$$
\begin{aligned}
c'(s) &= (D\phi_{-t} \cdot Y)(\psi_s \circ \phi_t(p)) \\
&= (D\phi_{-t} \cdot Y)\big(\phi_t\left(\phi_{-t} \circ \psi_s \circ \phi_t)(p)\right)\big) \\
&= Y(c(s)).
\end{aligned}
$$

Der Eindeutigkeitssatz, siehe Satz 4.2(i)), liefert $c(s) = \psi_s(p)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, und folglich $\phi_{-t} \circ \psi_s \circ \phi_t = \psi_s$ für alle $s,t \in \mathbb{R}$. $\square$

5 Alternierende Multilinearformen

Im folgenden sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, wir denken an den Modellfall $V = \mathbb{R}^n$ und an $V = T_pM$, den Tangentialraum einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit im Punkt p. Wir bezeichnen mit $\otimes^k V$ den Vektorraum der k-linearen Abbildungen

$$\omega : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \text{ Faktoren}} \to \mathbb{R},\ (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_k).$$

Die Addition und Skalarmultiplikation ist punktweise gegeben, also

$$\begin{aligned} (\omega + \eta)(v_1, \ldots, v_k) &= \omega(v_1, \ldots, v_k) + \eta(v_1, \ldots, v_k) \\ (\lambda\, \omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \lambda\, \omega(v_1, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

Definition 5.1 *$\omega \in \otimes^k V$ heißt alternierend, falls für alle Permutationen $\sigma \in S_k$ gilt:*

(5.1)
$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\, \omega(v_1, \ldots, v_k).$$

Wir bezeichnen den Raum der alternierenden k-Formen mit $\Lambda^k V$.

Äquivalent lassen sich alternierende Formen wie folgt charakterisieren: Transpositionen (Vertauschungen) haben Vorzeichen -1, also gilt

(5.2)
$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \quad \text{für alle } 1 \leq i < j \leq k.$$

Da die Gruppe S_k durch Transpositionen erzeugt wird, folgt umgekehrt (5.1). Mit $v_i = v_j$ ergibt sich nun weiter

(5.3)
$$\omega(v_1, \ldots, \overset{i}{v}, \ldots, \overset{j}{v}, \ldots, v_k) = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i < j \leq k.$$

Umgekehrt folgt (5.2) durch Wahl von $v = v_i + v_j$ und Ausmultiplizieren. Schließlich

(5.4)
$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0 \quad \text{falls } v_1, \ldots, v_k \text{ linear abhängig.}$$

Denn ein v_i kann als Linearkombination der anderen $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ geschrieben werden, und diese treten dann doppelt auf. Die umgekehrte Implikation ist hier trivial.

Wir haben die folgenden, schon bekannten Spezialfälle:

$$\begin{array}{ll} \Lambda^0 V = \mathbb{R} & \text{(per Definition)}, \\ \Lambda^1 V = V^* & \text{(der Dualraum)}, \\ \Lambda^n V = \mathbb{R} \cdot \det & \text{(Lineare Algebra)}, \\ \Lambda^k V = \{0\} \text{ für } k > n & \text{(nach (5.4))}. \end{array}$$

Lemma 5.1 (Alternator) *Sei* $\operatorname{Alt} : \otimes^k V \to \otimes^k V$ *definiert durch*

(5.5)
$$\operatorname{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

Dann ist Alt *eine lineare Projektion mit Bild $\Lambda^k V$.*

Beweis: Wir zeigen erst, dass Alt nach $\Lambda^k V$ abbildet. Für $\tau \in S_k$ berechnen wir, indem wir $v_{\tau(i)} =: w_i$ substituieren, also $w_{\sigma(i)} = v_{\tau\sigma(i)}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\omega)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)}) &= = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}\,(\sigma) \omega(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(k)}) \\
&= \frac{\mathrm{sign}\,(\tau)}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}\,(\tau\sigma) \omega(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(k)}) \\
&= \mathrm{sign}\,(\tau) \mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass die $\tau\sigma$ die Gruppe S_k genau einmal durchlaufen. Es ist klar dass Alt linear ist. Um zu sehen, dass Alt eine Projektion mit Bild $\Lambda^k V$ ist, zeigen wir nun $\mathrm{Alt}|_{\Lambda^k V} = \mathrm{Id}_{\Lambda^k V}$. Und zwar gilt für $\omega \in \Lambda^k V$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}\,(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \underbrace{\mathrm{sign}\,(\sigma) \mathrm{sign}\,(\sigma)}_{=1} \omega(v_1, \ldots, v_k) \\
&= \omega(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

□

Für allgemeine Multilinearformen haben wir das Tensorprodukt

$$\otimes^k V \times \otimes^\ell V \to \otimes^{k+\ell} V, \quad (\omega \otimes \eta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \omega(v_1, \ldots, v_k) \eta(v_{k+1}, \ldots, v_{k+\ell}).$$

Man sieht leicht, dass dieses Produkt assoziativ ist:

$$\begin{aligned}
(\omega \otimes \eta) \otimes \zeta(v_1, \ldots, v_{k+\ell+m}) &= (\omega \otimes \eta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell})\, \zeta(v_{k+\ell+1}, \ldots, v_{k+\ell+m}) \\
&= \omega(v_1, \ldots, v_k)\, \eta(v_{k+1}, \ldots, v_{k+\ell})\, \zeta(v_{k+\ell+1}, \ldots, v_{k+\ell+m}) \\
&= \omega \otimes (\eta \otimes \zeta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell+m}).
\end{aligned}$$

Wir definieren nun ein Produkt auf $\Lambda^k V$.

Definition 5.2 (Dachprodukt) *Das äußere Produkt (Dachprodukt) ist definiert durch*

$$\Lambda^k V \times \Lambda^\ell V \to \Lambda^{k+\ell} V,\ \omega \wedge \eta = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta). \tag{5.6}$$

Mit anderen Worten

$$\omega \wedge \eta(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \mathrm{sign}\,(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+\ell)}). \tag{5.7}$$

Beispiel 5.1 Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&k = 1,\ \ell = 1 \qquad \omega \wedge \eta(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1), \\
&k = 2,\ \ell = 1 \qquad \omega \wedge \eta(v_1, v_2, v_3) = \omega(v_1, v_2)\eta(v_3) + \omega(v_3, v_1)\eta(v_2) + \omega(v_2, v_3)\eta(v_1).
\end{aligned}$$

Prüfe nach, dass $\omega \wedge \eta$ tatsächlich alternierend ist.

Nach Definition ist das Dachprodukt in beiden beiden Faktoren linear, also zum Beispiel

$$(\lambda\omega + \mu\eta) \wedge \zeta = \lambda\,\omega \wedge \zeta + \mu\,\eta \wedge \zeta.$$

Satz 5.1 (Eigenschaften des Dachprodukts) *Für alternierende Formen $\omega \in \Lambda^k V$, $\eta \in \Lambda^\ell V$, $\zeta \in \Lambda^m V$ gelten folgende Rechenregeln:*

$$\begin{array}{llcll} (5.8) & \omega \wedge \eta & = & (-1)^{k\ell}\eta \wedge \omega & \textit{Kommutativgesetz (graduiert)}, \\ (5.9) & (\omega \wedge \eta) \wedge \zeta & = & \omega \wedge (\eta \wedge \zeta) & \textit{Assoziativgesetz} \end{array}$$

Beweis: Um (5.8) zu zeigen, betrachten wir die Permutation

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & k+1 & \ldots & k+\ell \\ \ell+1 & \ldots & \ell+k & 1 & \ldots & \ell \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} (\eta \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma)\eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(\ell)})\,\omega(v_{\sigma(\ell+1)}, \ldots, v_{\sigma(\ell+k)}) \\ &= \frac{\operatorname{sign}(\tau)}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma\tau)\eta(v_{\sigma\tau(k+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(k+\ell)})\,\omega(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(k)}) \\ &= (-1)^{kl}\omega \wedge \eta(v_1, \ldots, v_{k+\ell}). \end{aligned}$$

Die Assoziativität ist etwas schwieriger. Sei $I(k, k+\ell)$ die Menge der aufsteigenden Multiindizes $\alpha : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k+\ell\}$. Wir bezeichnen mit $\hat{\alpha} \in I(\ell, k+\ell)$ den dazu komplementären Multiindex, ebenfalls aufsteigend. Jede Permutation $\varrho \in S_{k+\ell}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$\varrho = (\alpha \circ \sigma, \hat{\alpha} \circ \tau) \quad \text{mit } \alpha \in I(k, k+\ell),\ \sigma \in S_k,\ \tau \in S_\ell,$$

und es gilt $\operatorname{sign}(\varrho) = \operatorname{sign}(\alpha, \hat{\alpha})\operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)$. Berechne nun für $\gamma \in \otimes^k V$ und $\zeta \in \otimes^\ell V$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Alt}(\gamma \otimes \zeta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) \\ = {} & \frac{1}{(k+\ell)!} \sum_{\alpha \in I(k,k+\ell)} \operatorname{sign}(\alpha, \hat{\alpha}) \cdot \\ & \sum_{\sigma \in S_k,\, \tau \in S_\ell} \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)\,\gamma(v_{\alpha(\sigma(1))}, \ldots, v_{\alpha(\sigma(k))})\,\zeta(v_{\hat{\alpha}(\tau(1))}, \ldots, v_{\hat{\alpha}(\tau(\ell))}) \\ = {} & \frac{k!\ell!}{(k+\ell)!} \sum_{\alpha \in I(k,k+\ell)} \operatorname{sign}(\alpha, \hat{\alpha})\operatorname{Alt}(\gamma)(v_{\alpha(1)}, \ldots, v_{\alpha(k)})\,\operatorname{Alt}(\zeta)(v_{\hat{\alpha}(1)}, \ldots, v_{\hat{\alpha}(\ell)}). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt substituiere $v_{\alpha(i)} =: w_i$, also $v_{\alpha(\sigma(i))} = w_{\sigma(i)}$. Die Rechnung zeigt

$$\operatorname{Alt}(\gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Alt}(\gamma \otimes \zeta) = 0.$$

Diese Aussage brauchen wir: da Alt = Id auf alternierenden Formen, gilt $\operatorname{Alt}(\gamma) = 0$ für die $(k+\ell)$-lineare Form $\gamma = \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Alt}\big((\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta) \otimes \zeta\big) \\ &= \operatorname{Alt}\big(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \zeta\big) - \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \zeta) \\ &= \frac{k!\ell!m!}{(k+\ell+m)!}(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta - \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \zeta). \end{aligned}$$

Bei anderer Klammerung folgt die analoge Formel, das Assoziativgesetzt ist gezeigt. $\square$

Aus dem Beweis ergibt sich für das Dachprodukt von $\gamma \in \Lambda^k V$ und $\zeta \in \Lambda^\ell V$ die Formel

$$\gamma \wedge \zeta(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \sum_{\alpha \in I(k,k+\ell)} \operatorname{sign}(\alpha, \hat{\alpha}) \gamma\big(v_{\alpha(1)}, \ldots, v_{\alpha(k)}\big) \zeta\big(v_{\hat{\alpha}(1)}, \ldots, v_{\hat{\alpha}(\ell)}\big). \tag{5.10}$$

Die Zahl der Summanden in (5.7) ist $(k+\ell)!$, dagegen sind es hier nur $(k+\ell)!/k!\ell!$.

Satz 5.2 (Dachprodukte von 1-Formen) *Für $\omega^1, \ldots, \omega^k \in \Lambda^1 V = V^*$ gilt:*

$$(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det\big(\omega^i(v_j)\big). \tag{5.11}$$

$$\omega^1, \ldots, \omega^k \textit{ linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k \neq 0. \tag{5.12}$$

Beweis: Wir zeigen (5.11) durch Induktion über k. Bezeichne mit $\hat{j} = (1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k)$ den zu j komplementären, aufsteigenden $(k-1)$-index. Es gilt dann, vgl. vorangehender Beweis und Definition des Dachprodukts,

$$\begin{aligned}
\omega^1 \wedge (\omega^2 \ldots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) &= \sum_{j=1}^k \operatorname{sign}(j, \hat{j}) \omega^1(v_j) \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^k(v_1, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_k) \\
&= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \omega^1(v_j) \det\big(\omega^i(v_\ell)\big)_{2 \leq i \leq k,\, \ell \neq j} \\
&= \det(\omega^i(v_j)).
\end{aligned}$$

Die $\omega^1(v_j)$ sind die Einträge der ersten Zeile, diese werden mit den Determinanten multipliziert,die sich durch Streichen der ersten Zeile und j-ten Spalte ergeben. Der letzte Schritt gilt also nach dem Laplace-Entwicklungssatz.

In (5.12) ist $\Leftarrow$ einfach. Umgekehrt zeigen wir, dass zu $\omega^1, \ldots, \omega^k$ linear unabhängig $v_1, \ldots, v_k$ existieren mit $\omega^i(v_j) = \delta^i_j$, also

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k(v_1, \ldots, v_k) = \det(\omega^i(v_j)) = 1.$$

Wir können dazu $k = n$ annehmen, sonst ergänze die ω^i zu einer Basis. Sei $\phi_1, \ldots, \phi_n$ die duale Basis in V^{**}, also $\phi_j(\omega^i) = \delta^i_j$. Die kanonische Abbildung $J : V \to V^{**}$ ist surjektiv, also gibt es $v_j \in V$ mit $Jv_j = \phi_j$, das heißt

$$\omega^i(v_j) = Jv_j(\omega^i) = \phi_j(\omega^i) = \delta^i_j.$$

$\square$

Satz 5.3 (Basis von $\Lambda^k V$) *Sei $e_1, \ldots, e_n$ Basis von V mit dualer Basis $e^1, \ldots, e^n \in V^*$. Dann hat $\Lambda^k V$ die Basis $e^I = e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Insbesondere gilt $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$, und jedes $\omega \in \Lambda^k V$ hat die Darstellung*

$$\omega = \sum_{I \in I(k,n)} \omega_I \, e^I \quad \textit{mit } \omega_I = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}). \tag{5.13}$$

Beweis: Betrachte für aufsteigende Multiindizes $I, J \in I(k,n)$ die Matrix $\big(e^{i_\ell}(e_{j_m})\big) \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Ist $I = J$, also $i_r = j_r$ für $r = 1,\dots,k$, so ist $e^{i_\ell}(e_{j_m}) = \delta_{\ell m}$. Andernfalls sei $r \in \{1,\dots,k\}$ der kleinste Index mit $i_r \neq j_r$. Im Fall $i_r > j_r$ ist $j_r \notin \{i_1,\dots,i_k\}$, also ist die r-te Spalte der Matrix Null. Im Fall $i_r < j_r$ ist $i_r \notin \{j_1,\dots,j_k\}$ und die r-te Zeile ist Null. Damit gilt

$$e^I(e_J) = \det\big(e^{i_\ell}(e_{j_m})\big)_{1\le \ell,m\le k} = \delta^I_J. \tag{5.14}$$

Für $\omega \in \Lambda^k V$ behaupten wir nun

$$\omega = \sum_{I\in I(k,n)} \omega_I e^I \quad \text{ mit } \omega_I = \omega(e_{i_1},\dots,e_{i_k}).$$

Da beide Seiten multilinear und alternierend sind, müssen wir das nur auf $e_J = (e_{j_1},\dots,e_{j_k})$, $J \in I(k,n)$, nachprüfen, dann folgt es aber direkt aus (5.14). Ist andererseits $\omega = \sum_{I\in I(k,n)} c_I e^I = 0$ mit beliebigen $c_I \in \mathbb{R}$, so folgt $c_J = \omega(e_J) = 0$ für alle $J \in I(k,n)$. □

Definition 5.3 (Pullback) *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $A \in L(V,W)$.*

(a) *Die transponierte (oder duale) Abbildung zu A ist*

$$A^* \in L(W^*, V^*),\ A^*\psi(v) = \psi(Av).$$

(b) *Der Pullback von k-Formen ω unter A ist*

$$A^* \in L(\Lambda^k W, \Lambda^k V),\ A^*\omega(v_1,\dots,v_k) = \omega(Av_1,\dots,Av_k).$$

Seien $v_1,\dots,v_n$ bzw. $w_1,\dots,w_m$ Basen von V und W, und $w^1,\dots,w^m \in W^*$ die duale Basis. Für $A \in L(V,W)$ sei $A^i_j = w^i(Av_j)$. Für Multiindizes $I \in I(k,m)$ und $J \in I(k,n)$ folgt dann

$$A^*w^I(v_J) = w^I(Av_{j_1},\dots,Av_{j_k}) = \det\big(w^{i_\ell}(Av_{j_m})\big) = \det\big(A^{i_\ell}_{j_m}\big).$$

Das ist die Determinante der $k \times k$ Submatrix von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, die sich durch Auswahl der Zeilen $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m$ und der Spalten $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$ ergibt. Diese Subdeterminante wird auch als $I \times J$-Minor der Matrix A bezeichnet.

Lemma 5.2 *Für den Pullback gelten folgende Rechenregeln:*

(i) *Sei $A \in L(V,W)$. Dann gilt für $\omega, \eta \in \Lambda^k W$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$$A^*(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda\, A^*\omega + \mu\, A^*\eta.$$

(ii) *Sei $A \in L(V,W)$. Dann gilt für $\omega \in \Lambda^k W$ und $\eta \in \Lambda^\ell W$*

$$A^*(\omega \wedge \eta) = (A^*\omega) \wedge (A^*\eta).$$

(iii) *Sei $A \in L(V,W)$ und $B \in L(W,Z)$. Dann gilt $(BA)^* = A^*B^*$.*

Beweis: Regel (i) ist klar. Für (ii) berechnen wir mit der Definition des Dachprodukts

$$
\begin{aligned}
A^*(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) &= (\omega \wedge \eta)(Av_1, \ldots, Av_{k+\ell}) \\
&= \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma)\, \omega(Av_{\sigma(1)}, \ldots, Av_{\sigma(k)})\, \eta(Av_{\sigma(k+1)}, \ldots, Av_{\sigma(k+\ell)}) \\
&= \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma)\, A^*\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\, A^*\eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+\ell)}) \\
&= (A^*\omega) \wedge (A^*\eta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}).
\end{aligned}
$$

Wir zeigen schließlich (iii),und zwar gilt für $\zeta \in \Lambda^k Z$

$$
(BA)^*\zeta(v_1, \ldots, v_k) = \zeta(BAv_1, \ldots, BAv_k) = B^*\zeta(Av_1, \ldots, Av_k) = A^*(B^*\zeta)(v_1, \ldots, v_k).
$$

□

6 Differentialformen

Definition 6.1 (Bündel $\Lambda^k TM$) *Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für $k = 0, 1, \ldots, n$ setzen wir*

$$\Lambda^k TM = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k T_p M$$

$\Lambda^k TM$ ist ein differenzierbares Vektorbündel vom Rang $\binom{n}{k}$. Die Präzisierung dieser Aussage geschieht analog zum Tangentialbündel. Wir haben zunächst die Bündelprojektion

$$\pi : \Lambda^k TM \to M,\ \pi(\omega) = p \quad \text{für } \omega \in \Lambda^k T_p M.$$

Die Faser $\pi^{-1}\{p\} = \Lambda^k T_p M$ ist ein Vektorraum der Dimension $\binom{n}{k}$ nach Satz 5.3 . Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$ hat $\omega \in \Lambda^k T_p M$ die Koordinaten

$$\omega_I := \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}(p)\Big) \quad \text{mit } I = (i_1, \ldots, i_k) \in I(k, n).$$

Damit ergeben sich die Bündelkarten, mit $N = \binom{n}{k}$,

$$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^N,\ \phi(\omega) = \big(p\,,\,(\omega_I)_{I \in I(k,n)}\big)$$

Eine Menge $\Omega \subset \Lambda^k TM$ ist genau dann offen, wenn $\phi(\Omega \cap \pi^{-1}(U))$ offen in $U \times \mathbb{R}^N$ ist für alle Karten im maximalem Atlas $\mathcal{A}$. Eine Folge $\omega^\nu \in \Lambda^k TM$ konvergiert genau dann gegen $\omega \in \Lambda^k TM$, wenn Folgendes gilt:

- Für die Fußpunkte $p^\nu = \pi(\omega^\nu)$ und $p = \pi(\omega)$ gilt $p^\nu \to p$.
- Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte mit $p \in U$. Dann gilt $\omega_I^\nu \to \omega_I$.

Definition 6.2 (Differentialform) *Einen Schnitt $\omega : M \to \Lambda^k TM$, also $\omega(p) \in \Lambda^k T_p M$ für alle p, bezeichnet man als alternierende Differentialform vom Grad k auf M (kurze Bezeichnung: k-Form).*

Wir haben folgende Spezialfälle:

$k = 0$: Wir hatten nach Definition $\Lambda^0 T_p M = \mathbb{R}$. Die Formen vom Grad $k = 0$ sind damit die Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$.

$k = 1$: $\Lambda^1 T_p M$ ist der Raum der Linearformen $\omega : T_p M \to \mathbb{R}$, mit anderen Worten der Dualraum $(T_p M)^*$. Das Bündel $\Lambda^1 TM$ ist damit identisch mit dem Kotangentialbündel

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M, \qquad \text{wobei } T_p^* M = (T_p M)^*.$$

Für eine Funktion $f \in C^1(M)$ ist das Differential $df(p) : T_p M \to \mathbb{R}$ linear, also gilt $df(p) \in (T_p M)^*$ und damit ist $df : M \to T^*M$ eine 1-Form.* Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte, so haben wir auf U die 1-Formen

$$dx^i : U \to T^*U \subset T^*M,\ dx^i(p)v = (D\varphi(p)v)^i. \tag{6.1}$$

*Wir haben bisher $Df(p)$ geschrieben, für reelle Funktionen ist $df(p)$ aber üblich, siehe unten.

Die $dx^i(p)$ sind die duale Basis zu den $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$, denn

$$dx^i(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \big(\underbrace{D\varphi(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p)}_{=e_j}\big)^i = \delta^i_j.$$

Somit hat jede 1-Form $\omega : M \to T^*M$ auf U die lokale Darstellung

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \, dx^i \quad \text{ mit } \omega_i = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) : U \to \mathbb{R}.$$

Nach Definition der Bündelkarten ist $\omega \in C^r(T^*M)$ genau wenn $\omega_i \in C^r(U)$ ist, für alle Karten φ und alle $i = 1, \ldots, n$.

Für k beliebig erhalten wir nun die Basisformen, bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$,

$$dx^I : U \to \Lambda^k(TU) \subset \Lambda^k(TM),\ dx^I = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Jede k-Form ω hat auf U die Darstellung

$$\omega = \sum_{I \in I(k,n)} \omega_I \, dx^I \quad \text{ mit } \omega_I = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big).$$

Definition 6.3 (Pullback von Differentialformen) *Sei $f \in C^1(M,N)$. Der Pullback der k-Form η auf N ist die k-Form $f^*\eta(p) = Df(p)^*\eta(f(p))$ auf M, bzw.*

$$f^*\eta(p)(v_1, \ldots, v_k) = \eta(f(p))(Df(p)v_1, \ldots, Df(p)v_k).$$

Lemma 6.1 *Für den Pullback von Differentialformen gelten folgende Rechenregeln, wobei jeweils $f \in C^1(M,N)$ ist:*

(a) $f^*(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda f^*\omega + \mu f^*\eta$ *(ω, η k-Formen auf N, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).*

(b) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ *(ω, η eine k-Form bzw. ℓ-Form auf N).*

(c) $(g \circ f)^*\zeta = f^*(g^*\zeta)$ *($g \in C^1(N,P)$ und ζ k-Form auf P).*

Wir wollen den Pullback auch in Koordinaten berechnen. Sei also $f \in C^1(M,N)$, mit $\dim M = m$ und $\dim N = n$, und seien $\varphi : U \to \varphi(U)$ sowie $\psi : V \to \psi(V)$ lokale Koordinaten auf M bzw. N, so dass $f(U) \subset V$. Sei $\eta = \sum_{J \in I(k,n)} \eta_J dy^J$ die Koordinatendarstellung einer k-Form auf N. Dann gilt nach Kettenregel

$$f^*dy^j = dy^j \circ Df = d(y^j \circ f) =: df^j.$$

Mit Aussage (b) von Lemma 6.1 folgt dann

$$f^*\eta = \sum_{J \in I(k,n)} \eta_J \circ f \, f^*dy^J = \sum_{J \in I(k,n)} \eta_J \circ f \, df^J, \tag{6.2}$$

Dabei ist $df^J = df^{j_1} \wedge \ldots \wedge df^{j_k}$ ein Produkt von 1-Formen. Wenden wir das auf die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^I}$ mit $I = (i_1, \ldots, i_k) \in I(k,m)$ an, so folgt mit Satz 5.2 die lokale Darstellung

$$f^*\eta = \sum_{I \in I(k,m)} \sum_{J \in I(k,n)} \eta_J \circ f \, \det\Big(\frac{\partial f^J}{\partial x^I}\Big) \, dx^I. \tag{6.3}$$

Satz 6.1 (die äußere Ableitung d) *Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Es gibt Operatoren $d : C^1(\Lambda^k TM) \to C^0(\Lambda^{k+1}TM)$, für $k = 0, 1, \ldots, n$, mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Sei $\omega = \sum_{I \in I(k,n)} \omega_I \, dx^I$ bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$. Dann gilt auf U*

$$d\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \quad \text{wobei} \quad \frac{\partial \omega}{\partial x^i} = \sum_{I \in I(k,n)} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} \, dx^I. \tag{6.4}$$

Für $f \in C^1(M)$ ist df das Differential, also $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \, dx^j$.

(b) *Es gilt $d^2 = 0$, genauer $d(d\omega) = 0$ für $\omega \in C^2(\Lambda^k TM)$.*

(c) *Es gilt die Produktregel*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \quad \text{für } \omega \in C^1(\Lambda^k TM),\ \eta \in C^1(\Lambda^\ell TM). \tag{6.5}$$

(d) *Ist $f \in C^2(M, N)$ mit $\dim N = m$, so gilt*

$$d(f^*\eta) = f^*(d\eta) \quad \text{für } \eta \in C^1(\Lambda^k TN). \tag{6.6}$$

Es ist unter anderem zu zeigen, dass d so wohldefiniert ist, also nicht von der Karte abhängt. Für n-Formen ω ist jedenfalls $d\omega = 0$, denn $\Lambda^{n+1}TM = 0$.

Beweis: *Schritt 1:* Für d^φ wie in (a) definiert gilt Regel (b).

$$\begin{aligned}
d^\varphi(d^\varphi \omega) &= \sum_{i=1}^n dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^i} \Big(\sum_{j=1}^n dx^j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^j} \Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^n dx^i \wedge dx^j \wedge \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (dx^i \wedge dx^j + dx^j \wedge dx^i) \wedge \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j} \qquad \text{(Satz von Schwarz)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Schritt 2: Für d^φ wie in (a) definiert gilt Regel (c).

$$\begin{aligned}
d^\varphi(\omega \wedge \eta) &= \sum_{i=1}^n dx^i \wedge \Big(\frac{\partial \omega}{\partial x^i} \wedge \eta + \omega \wedge \frac{\partial \eta}{\partial x^i} \Big) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^n dx^i \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \Big) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \Big(\sum_{i=1}^n dx^i \wedge \frac{\partial \eta}{\partial x^i} \Big) \\
&= d^\varphi \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d^\varphi \eta.
\end{aligned}$$

Schritt 3: Seien $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ Karten von M bzw. N mit $f(U) \subset V$. Sind d^φ auf U sowie d^ψ auf V jeweils durch (a) definiert, so gilt $d^\varphi(f^*\eta) = f^*(d^\psi \eta)$. Dazu berechnen wir für $\eta = \sum_{J \in I(k,n)} \eta_J \, dy^J$ zuerst

$$d^\psi \eta = \sum_{j=1}^n dy^j \wedge \sum_{J \in I(k,n)} \frac{\partial \eta_J}{\partial y^j} dy^J = \sum_{J \in I(k,n)} d\eta_J \wedge dy^J.$$

Jetzt verwenden wir Formel (6.2) für den Pullback, es gilt

$$\begin{aligned}
d^\varphi(f^*\eta) &= d^\varphi\Big(\sum_{J\in I(,n)} \eta_J \circ f\, d^\varphi f^{j_1} \wedge \ldots \wedge d^\varphi f^{j_k}\Big) \quad \text{(beachte } df^j = d^\varphi f^j \text{ nach (a))}\\
&= \sum_{J\in I(k,n)} d^\varphi(\eta_J \circ f) \wedge d^\varphi f^{j_1} \wedge \ldots \wedge d^\varphi f^{j_k} \quad \text{(Regeln (c) und (b))}\\
&= \sum_{J\in I(k,n)} d(\eta_J \circ f) \wedge df^{j_1} \wedge \ldots \wedge df^{j_k} \quad \text{(wieder nach (a))}\\
&= \sum_{J\in I(k,n)} f^*(d\eta_J) \wedge f^*(dy^{j_1}) \wedge \ldots \wedge f^*(dy^{j_k}) \quad \text{(Kettenregel)}\\
&= f^*(d^\psi \eta) \qquad \text{(Lemma 5.2(b))}.
\end{aligned}$$

Schritt 4: Wohldefiniertheit des Operators d
Seien $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ zwei Karten von M mit $U \cap V \neq \emptyset$. Wir wenden Schritt 3 an mit $f = \mathrm{id}_M$. Sind d^φ bzw. d^ψ die Operatoren nach (a), so folgt

$$d^\varphi \eta = d^\varphi(\mathrm{id}_M^*\eta) = \mathrm{id}_M^* d^\psi \eta = d^\psi \eta.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

In Schritt 3 trat eine alternative Formel für d auf, und zwar

$$(6.7) \qquad d\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge \sum_{I\in I(k,n)} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i}\, dx^I = \sum_{I\in I(k,n)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^I = \sum_{I\in I(k,n)} d\omega_I \wedge dx^I.$$

Beispiel 6.1 Die Vektoranalysis im $\mathbb{R}^n$, insbesondere $n = 3$, ist ein Spezialfall der äußeren Ableitung. Dazu führen wir folgende Notation ein (lies: v *eingesetzt in* ω):

$$(6.8) \qquad (v \llcorner \omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \ldots v_{k-1}) \quad \text{für } \omega \in \Lambda^k V \text{ und } v, v_1, \ldots, v_k \in V.$$

Sei U offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit Karte id_U. Für ein Vektorfeld $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}
X \llcorner (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) &= \sum_{j=1}^n X^j e_j \llcorner (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)\\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} X^j dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx}^j \wedge \ldots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Es folgt für die äußere Ableitung

$$\begin{aligned}
d\big(X \llcorner (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)\big) &= \sum_{i=1}^n dx^i \wedge \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx}^j \wedge \ldots \wedge dx^n\\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n\\
&= \operatorname{div} X\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Im Fall $n = 3$ setze $\xi = \sum_{j=1}^3 \xi_j dx^j$ mit $\xi_j = X^j$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
d\xi &= \sum_{i=1}^3 dx^i \wedge \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i}\, dx^j \\
&= \Big(\frac{\partial \xi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x^3}\Big)\, dx^2 \wedge dx^3 + \Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x^1}\Big)\, dx^3 \wedge dx^1 + \Big(\frac{\partial \xi_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x^2}\Big)\, dx^1 \wedge dx^2 \\
&= \operatorname{rot} X \llcorner (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3).
\end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= d(df) = \operatorname{rot}\operatorname{grad} f \llcorner dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \\
0 &= d(d\xi) = \operatorname{div}\operatorname{rot} X\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.
\end{aligned}$$

Definition 6.4 (de-Rham-Kohomologie) *Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist der k-te de-Rham-Kohomologieraum*† *der Quotientenvektorraum*

$$H^k_{DR}(M) = Z^k(M)/B^k(M),$$

wobei $Z^k(M)$ der Kern von d und $B^k(M)$ das Bild von d ist, genauer

$$\begin{aligned}
Z^k(M) &= \{\omega \in C^\infty(\Lambda^k TM) : d\omega = 0\}, \\
B^k(M) &= \{d\eta : \eta \in C^\infty(\Lambda^{k-1} TM)\}.
\end{aligned}$$

Beachte, dass $B^k(M)$ ein Untervektorraum von $Z^k(M)$ ist wegen $d(d\eta) = 0$.

Man kann die Definition der Kohomologie durch das Problem motivieren, ob eine gegebene Form $\omega \in C^\infty(\Lambda^k TM)$ eine Stammform $\eta \in C^\infty(\Lambda^{k-1} TM)$ hat, also $d\eta = \omega$. Wegen $d(d\eta) = 0$ ist dazu die Bedingung $d\omega = 0$ offensichtlich notwendig. Wir werden unten zeigen, dass diese Bedingung lokal auch hinreichend ist (Lemma von Poincaré). Aber global gibt es eventuell zusätzliche Bedingungen, die mit der Topologie von M zu tun haben. Diese werden durch die Kohomologie beschrieben. Eine solche Situation ist schon aus der Theorie der Kurvenintegrale oder der komplexen Funktionentheorie bekannt. Übrigens nennt man ω geschlossen wenn $d\omega = 0$ bzw. $\omega \in Z^k(M)$, und exakt, wenn es eine $(k-1)$-Form η gibt mit $\omega = d\eta$, also $\omega \in B^k(M)$. Das folgende Lemma zeigt, die Kohomologie von M ist eine Diffeomorphieinvariante. Nach dem Satz von de Rham hängt $H^k_{DR}(M)$ tatsächlich nicht von der differenzierbaren Struktur ab, der Raum stimmt mit der singulären Kohomologie von M überein.

Lemma 6.2 *Eine Abbildung $f \in C^\infty(M,N)$ induziert die lineare Abbildung*

$$f^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M),\ f^*[\omega] = [f^*\omega].$$

Ist $g \in C^\infty(N,P)$ so gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Für einen Diffeomorphimus $f \in C^\infty(M,N)$ ist $f^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Es gilt $f^* d\eta = df^*\eta$, also $[f^* d\eta] = 0$ in $H^k_{DR}(M)$. Somit ist f^* wohldefiniert und linear. Weiter gilt

$$(g \circ f)^*[\zeta] = [(g \circ f)^*\zeta] = [(g \circ f)^*\zeta] = [f^*(g^*\zeta)] = f^*(g^*[\zeta]).$$

†Georges de Rham, Sur l'analysis situs des varietés á n dimensions, Dissertation Paris 1931

Ist f Diffeomorphismus und $g = f^{-1}$, so folgt

$$\mathrm{id}_{H^k_{DR}(M)} = (f \circ g)^* = g^* \circ f^* \quad \text{und analog} \quad \mathrm{id}_{H^k_{DR}(N)} = f^* \circ g^*.$$

□

Wir werden später zeigen, dass $H^k_{DR}(M)$ endlichdimensional ist für kompakte Mannigfaltigkeiten M. Damit das Problem der Stammform lösbar ist, kommen also zur Gleichung $d\omega = 0$ nur endlich viele Bedingungen hinzu. Die Zahlen $b_k(M) = \dim H^k_{DR}(M)$ heißen Bettizahlen. [‡]. Der Satz von de Rham besagt, dass die Bettizahlen Homeomorphieinvarianten sind. Die Euler-Poincaré-Charakteristik ist die Wechselsumme

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, b_k(M).$$

Beispiel 6.2 Für $k = 0$ gilt $B^0(M) = \{0\}$ per Definition, also ist $H^0_{DR}(M) = Z^0(M)$ der Raum der lokal konstanten Funktionen. Sei $C(M)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von M, und

$$\phi : H^0_{DR}(M) \to \mathrm{Abb}(C(M), \mathbb{R}), \quad \phi(f)(M_p) = f(p).$$

Dabei bezeichnet M_p die Komponente von p, die Abbildung ist wohldefiniert da f auf der Komponente konstant ist. Ist $\phi(f) = 0$, so ist f auf jeder Komponente gleich Null und damit die Nullfunktion. Zu gegebener Abbildung $\varphi : C(M) \to \mathbb{R}$ könen wir f lokal konstant wählen mit $f|_{M'} = \varphi(M')$ für jede Komponente M'. Damit ist ϕ ein Isomorphismus. Ist $\#C(M) = \ell \in \mathbb{N}$, so ist $H^0_{DR}(M)$ isomorph zu $\mathbb{R}^\ell$, also $b_0(M) = \ell$.

Beispiel 6.3 Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Es gilt dann $Z^1(I) = C^\infty(I, \Lambda^1\mathbb{R})$, und jede solche Form γ hat die Darstellung $\gamma(x) = g(x)\, dx$ mit $g \in C^\infty(I)$. Die (glatten) Nullformen sind die Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, und $df(x) = f'(x)\, dx$. Es folgt $Z^1(I) = B^1(I)$ und $H^0_{DR}(I) = \{0\}$, denn für $x_0 \in I$ beliebig gilt

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g(x), \text{ also } df = \gamma.$$

Beispiel 6.4 Sei $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$. Definiere mit dem Kurvenintegral längs c die Abbildung

$$\phi : H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) \to \mathbb{R},\ \phi[\omega] = \frac{1}{2\pi} \int_c \omega.$$

Dann ist ϕ ein Isomorphismus.

Wir wollen nun sehen, wie sich die Kohomologie unter Homotopien verhält. Betrachte dazu $[0,1] \times M$, für eine gegebene n-dimensionale Mannigfaltigkeit M. Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte von M, so haben wir die induzierte Karte

$$\overline{\varphi} : [0,1] \times U \to [0,1] \times \varphi(U), \overline{\varphi}(t,p) = (t, \varphi(p)).$$

Bezeichnen wir die t-Koordinate mit dem Index $i = 0$, so lautet eine k-Form η

$$\eta = \sum_{I \in I(k-1,n)} \eta_{0I}(t,p)\, dt \wedge dx^I + \sum_{J \in I(k,n)} \eta_J(t,p)\, dx^J =: dt \wedge \alpha + \beta.$$

[‡]Enrico Betti, Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, Annali di Matematica 1870

Diese Zerlegung hängt nicht von der Karte φ ab, und zwar gilt

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta, \qquad \text{und dann } \beta = \eta - dt \wedge \alpha.$$

Sei $d_x = \sum_{j=1}^n dx^j \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ die *partielle* äußere Ableitung. Wir berechnen

$$d\eta = dt \wedge \frac{\partial \eta}{\partial t} + d_x \eta = -dt \wedge d_x \alpha + dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t} + d_x \beta.$$

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \llcorner d\eta = -d_x \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad \text{ und } \quad d\big(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta\big) = d\alpha = dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} + d_x \alpha.$$

Damit haben wir die Formel

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \llcorner d\eta + d\big(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta\big). \tag{6.9}$$

Wir wollen nun die t-Variable ausintegrieren. Sei $i_t : M \to [0,1] \times M$, $i_t(p) = (t,p)$. Definiere die Abbildung $I : C^\infty(\Lambda^k T([0,1] \times M)) \to C^\infty(\Lambda^{k-1} TM)$ durch

$$I\eta(p)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \int_0^1 \eta(t,p)\big(\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \ldots, v_{k-1}\big)\, dt. \tag{6.10}$$

Dabei identifizieren wir $v_i \in T_pM$ mit $(0, v_i) \in T_{(t,p)}([0,1] \times M)$. Alternativ gilt die Darstellung

$$I\eta(p) = \int_0^1 \underbrace{(i_t)^* \big(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta\big)(p)}_{\in \Lambda^{k-1} T_pM}\, dt.$$

Mit Parameterdifferentiation und Vertauschung von d und i_t^* ergibt sich

$$\begin{aligned} d(I\eta) &= d \int_0^1 (i_t)^* \big(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta\big)\, dt = \int_0^1 (i_t)^* d\big(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta\big)\, dt \\ I(d\eta) &= \int_0^1 (i_t)^* \big(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner d\eta\big)\, dt. \end{aligned}$$

Aus (6.9) folgt

$$d(I\eta) + I(d\eta) = \int_0^1 (i_t)^* \frac{\partial \eta}{\partial t}\, dt.$$

Berechne nun für $t_0 \in [0,1]$ und $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$

$$(i_{t_0})^* \frac{\partial \eta}{\partial t}(p)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(t_0, p)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{\partial}{\partial t} \eta(t,p)(v_1, \ldots, v_k)|_{t=t_0}.$$

Somit folgt

$$d(I\eta) + I(d\eta) = (i_1)^* \eta - (i_0)^* \eta. \tag{6.11}$$

Satz 6.2 (Lemma von Poincaré) [§] *Gegeben sei eine Homotopie $f \in C^\infty([0,1] \times M, N)$. Dann gilt für jede k-Form $\omega \in C^\infty(\Lambda^k TN)$ die Homotopieformel*

$$(f_1)^* \omega - (f_0)^* \omega = d(I f^* \omega) + I(f^* d\omega) \quad \textit{wobei } f_t(p) = f(t,p). \tag{6.12}$$

[§] Henri Poincaré 1895, Vito Volterra 1889

BEWEIS: Wende (6.11) an mit $\eta = f^*\omega$, also $(i_t)^*\eta = (f \circ i_t)^*\omega = (f_t)^*\omega$. Mit $d\eta = df^*\omega = f^*d\omega$ folgt die Behauptung. $\square$

Um Formel (6.12) anschaulich zu verstehen, ist es nützlich den Satz von Stokes zur Verfügung zu haben, wir kommen dann darauf zurück.

Folgerung 6.1 (Homotopieinvarianz) *Sind $f_0, f_1 \in C^\infty(M,N)$ glatt homotop, so sind die induzierten Abbildungen $f_0^*, f_1^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M)$ gleich.*

BEWEIS: Sei $\omega \in Z^k(M)$, also $d\omega = 0$. Dann folgt $[f_1^*\omega] = [f_0^*\omega + dIf^*\omega] = [f_0^*\omega]$. $\square$

Folgerung 6.2 *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, so gilt $H^k(U) = \{0\}$ für $k \geq 1$.*

BEWEIS: Sei U sternförmig bezüglich des Punkts $x_0 \in U$. Dann ist $f : [0,1] \times U \to U$, $f(t,x) = tx + (1-t)x_0$, eine Homotopie zwischen $f_0 \equiv x_0$ und $f_1 = \mathrm{id}_U$. Es folgt

$$H^k(U) = \text{Bild}\, f_1^* = \text{Bild}\, f_0^* = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0 \\ \{0\} & \text{für } k \geq 1. \end{cases}$$

Wir wollen die Stammform hier explizit bestimmen, und zwar ist

$$\begin{aligned} If^*\omega(x)(v_1,\ldots,v_{k-1}) &= \int_0^1 (f^*\omega)(t,x)\big(\frac{\partial}{\partial t}, v_1,\ldots,v_{k-1}\big)\,dt \\ &= \int_0^1 \omega(tx + (1-t)x_0)(x - x_0, tv_1, \ldots, tv_{k-1})\,dt, \end{aligned}$$

das heißt die Stammform von ω ist

$$I(f^*\omega) = \int_0^1 t^{k-1}(x - x_0) \llcorner \omega(tx + (1-t)x_0)\,dt. \tag{6.13}$$

$\square$

Für die Definition des Integrals einer n-Form auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit brauchen wir den Begriff der Orientierung. Zunächst erinnern wir an dieses Konzept in der Linearen Algebra. Seien $\mathcal{A} = \{a_1,\ldots,a_n\}$, $\mathcal{B} = \{b_1,\ldots,b_n\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Man hat dann die Transformationsmatrix $T = \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$, also $a_j = \sum_{i=1}^n T_{ij} b_i$ für $j = 1,\ldots,n$. Die Basen heißen gleich orientiert, Symbol $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, wenn $\det T > 0$. Bekanntlich gilt

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \mathrm{E}_n, \quad \mathrm{id}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{A}} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,\mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}.$$

Somit ist $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen. Ist σ eine dieser Klassen, so heißt σ Orientierung von V und (V,σ) ist ein orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Basis $\mathcal{A}$ heißt dann positiv (bzw. negativ) orientiert, wenn $\mathcal{A} \in \sigma$ (bzw. $\mathcal{A} \notin \sigma$). Ein Isomorphismus zwischen orientierten Vektorräumen, also $A : (V,\sigma) \to (W,\tau)$, heißt orientierungstreu, falls gilt:

$$[v_1,\ldots,v_n] = \sigma \quad \Rightarrow \quad [Av_1,\ldots,Av_n] = \tau.$$

Insbesondere ist ein Automorphismus $A : (V,\sigma) \to (V,\sigma)$ genau dann orientierungstreu, wenn $\det A > 0$, und A heißt dann auch orientierungserhaltend.

Definition 6.5 (Orientierung einer Mannigfaltigkeit) *Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Orientierung von M ist eine Wahl $\sigma(p)$ der Orientierungen von T_pM, für alle $p \in M$, so dass gilt: zu $p \in M$ gibt es eine Karte (U, φ) mit*

$$\sigma|_U = \Big[\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big].$$

M heißt orientierbar, wenn eine Orientierung von M existiert.

Die Bedingung garantiert, dass die Orientierung nicht lokal beliebig springen kann.

Lemma 6.3 *M ist genau dann orientierbar, wenn es einen Atlas von M gibt, so dass alle Kartenwechsel positive Jacobideterminante haben.*

Beweis: Seien (U, φ) und (V, ψ) Karten auf M mit Basisfeldern $\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ und $\mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}$. Nach (3.6) gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\psi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p))\, \frac{\partial}{\partial y^i}(p).$$

Ist σ eine Orientierung von M, so bilden die Karten aus Definition 6.5 einen Atlas mit der gewünschten Eigenschaft: die Orientierung der Basisfelder ist durch σ gegeben und damit gleich auf den overlaps, also haben die Kartenwechsel positive Jacobideterminante. Ist umgekehrt ein solcher Atlas $\mathcal{A}$ gegeben, so setzen wir für jede Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$

$$\sigma|_U := \Big[\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big].$$

Auf Overlaps stimmen die Definitionen überein, also ist σ eine Orientierung von M. $\square$

Lemma 6.4 *Sei M zusammenhängend und orientierbar. Dann gibt es genau zwei Orientierungen von M.*

Beweis: Seien σ, τ Orientierungen von M. Wir zeigen, dass $G = \{p \in M : \sigma(p) = \tau(p)\}$ offen ist. Zu $p \in G$ wähle Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ mit $p \in U \cap V$, und

$$\sigma|_U = \Big[\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big] \quad \text{sowie } \tau|_V = \Big[\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big].$$

Da $\sigma(p) = \tau(p)$ ist $\det D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) > 0$. Aber dann ist $\det D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi > 0$, und damit $\sigma = \tau$, auf einer Umgebung von p. Analog sieht man, dass auch $M \backslash A = \{p \in M : \sigma(p) \neq \tau(p)\}$ offen ist. Somit ist entweder $A = \emptyset$ oder $A = M$, und es gibt höchstens zwei Orientierungen. Ist nun σ eine Orientierung von M, so können wir in jedem $p \in M$ die entgegengesetzte Orientierung $\tau(p)$ wählen. Ist $\mathcal{A}$ ein Atlas wie in Definition 6.5, so bekommen wir einen entsprechenden Atlas für τ, indem wir jede Karte (U, φ) durch $(U, S \circ \varphi)$ ersetzen, wobei $S \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ mit $\det S < 0$. $\square$

Sei jetzt $f : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus, und τ sei eine Orientierung von N. Wir definieren dann die induzierte Orientierung $f^*\tau$ auf M durch

$$f^*\tau(p) = \big[Df(p)^{-1}w_1, \ldots, Df(p)^{-1}w_n\big] \quad \text{wobei } \tau(f(p)) = [w_1, \ldots, w_n].$$

Für zwei Basen $\mathcal{B}_{1,2}$ von $T_{f(p)}N$ und $\mathcal{A}_{1,2} = Df(p)^{-1}\mathcal{B}_{1,2}$ gilt $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2} = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$; also ist $f^*\tau(p)$ wohldefiniert. Wir zeigen jetzt, dass es zu $p \in M$ eine Karte wie in Definition 6.5 gibt. Wähl eine Karte (V,ψ) auf N bei $f(p)$ mit Basisfeldern $\frac{\partial}{\partial y^i}$ in der Orientierung τ. Es gibt eine Umgebung U von p, so dass $f|_U$ diffeomorph auf $f(U) \subset V$ abbildet. Dann ist $(U, \psi \circ f|_U)$ eine Karte von M, und für die zugehörigen Basisfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$ gilt für alle $q \in U$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(q) = D(\psi \circ f|_U)(q)^{-1} e_i = Df(q)^{-1} D\psi(f(q))^{-1} e_i = Df(q)^{-1} \frac{\partial}{\partial y^i}(f(q)).$$

Nach Definition ist also $f^*\tau = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right]$ auf U.

Definition 6.6 *Ein lokaler Diffeomorphismus $f : (M,\sigma) \to (N,\tau)$ heißt orientierungstreu (bzw. orientierungsumkehrend), falls $f^*\tau = \sigma$ (bzw. $f^*\tau \neq \sigma$).*

Beispiel 6.5 $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist orientierbar, und zwar sei

$$\sigma(p) = [v_1, \ldots, v_n] \quad \text{wobei } v_i \in T_pM \text{ mit } \det(p, v_1, \ldots, v_n) > 0.$$

Offenbar ist $\sigma(p)$ wohldefiniert. Sei (U,φ) eine Karte bei p mit U zusammenhängend. Dann ist die Funktion $\det\big(p, \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\big)$ entweder positiv auf U oder negativ auf U. Im zweiten Fall schalten wir die Spiegelung an der Hyperebene $x^n = 0$ dahinter; damit haben wir in beiden Fällen eine Karte wie in Definiton 6.5 verlangt. Wir betrachten nun die Antipodenabbildung

$$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n,\ f(p) = -p.$$

Seien $v_i \in T_{-p}\mathbb{S}^n$ mit $\sigma(-p) = [v_1, \ldots, v_n]$, also $\det(-p, v_1, \ldots, v_n) > 0$. Dann gilt $Df(p)^{-1} v_i = -v_i$ und $\det(p, -v_1, \ldots, -v_n) = (-1)^{n+1} \det(-p, v_1, \ldots, v_n)$. Also ist $f^*\sigma = \sigma$ genau wenn n ungerade ist.

Der folgende Satz gibt eine alternative Definition der Orientierbarkeit.

Satz 6.3 *Für eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M sind äquivalent:*

(i) *M ist orientierbar*

(ii) *Es gibt eine Form $\omega \in C^\infty(\Lambda^n TM)$ mit $\omega(p) \neq 0$ für alle $p \in M$.*

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): Definiere für jedes $q \in M$ auf T_qM die Orientierung

$$\sigma(q) = [v_1, \ldots, v_n] \quad \text{wobei } v_i \in T_qM \text{ mit } \omega(q)(v_1, \ldots, v_n) > 0.$$

Sei (U,φ) eine Karte bei $p \in M$ mit U zusammenhängend. Dann gilt $\omega|_U = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ mit $f \neq 0$. Wir können $f > 0$ auf U annehmen, sonst gehe über zu $S \circ \varphi$, wobei S die Spiegelung an $\{x^n = 0\}$ ist. Es folgt $\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}) = f > 0$, also $\sigma|_U = [\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}]$ auf U.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wähle einen orientierten Atlas $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Es gibt dann eine untergeordnete, lokal endliche Teilung der Eins $\eta_\lambda \in C^\infty(M)$, das heißt $\eta_\lambda \geq 0$ und

(a) $\operatorname{spt} \eta_\lambda \subset U_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$,

(b) jedes $p \in M$ hat eine Umgebung U mit $\{\lambda \in \Lambda : \operatorname{spt} \eta_\lambda \cap U \neq \emptyset\}$ endlich.

(c) $\sum_{\lambda\in\Lambda}\eta_\lambda = 1$ auf ganz M.

Die Existenz einer solchen Teilung der Eins wird in Satz 10.1 gezeigt. Definiere nun

$$\omega = \sum_{\lambda\in\Lambda}\eta_\lambda\,\omega_\lambda \qquad \text{wobei } \omega_\lambda = d\varphi_\lambda^1\wedge\ldots\wedge d\varphi_\lambda^n.$$

Für jedes $\lambda\in\Lambda$ ist M Vereinigung der offenen Mengen U_λ und $M\backslash\operatorname{spt}\eta_\lambda$, also ist $\eta_\lambda\,\omega_\lambda$ glatt. Wegen (b) ist dann $\omega\in C^\infty(\Lambda^n TM)$, und es gilt für $p\in U_\lambda$

$$\omega(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}(p),\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}(p)\Big) = \sum_{\mu:\, p\in U_\mu}\underbrace{\eta_\mu(p)}_{\geq 0}\,\underbrace{\det D(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda(p))}_{>0} > 0.$$

$\square$

7 Integration von n-Formen

Jetzt kommen wir endlich zur Integration von n-Formen. Der folgende Satz spielt dabei eine wesentliche Rolle.

Transformationssatz Sei $\phi \in C^1(U,V)$ ein Diffeomorphismus der offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f : V \to [-\infty, \infty]$ messbar bezüglich $\mathcal{L}^n$, so gilt

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(\phi(x))|\det D\phi(x)|\, dx,$$

wenn eines der Integrale existiert.

Die Symbole dx und dy in diesem Satz sind keine Differentialformen. sie stehen für Integration bezüglich des Lebesguemaßes, sind also nur Abkürzungen für $d\mathcal{L}^n(x)$ bzw. $d\mathcal{L}^n(y)$. Auf der Mannigfaltigkeit M haben wir kein kanonisches Maß gegeben, deshalb führen wir den Begriff der Messbarkeit mittels Karten auf $\mathbb{R}^n$ zurück.

Definition 7.1 *Sei M eine n-dimensonale differenzierbare Mannigfaltigkeit. $E \subset M$ heißt messbar (bzw. Nullmenge), wenn $\varphi(E \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ messbar (bzw. Nullmenge) ist bezüglich $\mathcal{L}^n$, für alle Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$.*

Es genügt hier, die Eigenschaft für einen Atlas von M nachzuweisen, für jede andere Karte folgt sie dann aus dem Transformationssatz, angewandt auf die Kartenwechsel. Ähnlich gehen wir vor, um die Messbarkeit von n-Formen zu definieren. In lokalen Koordinaten (U, φ) hat eine n-Form $\omega : M \to \Lambda^k(TM)$ die Darstellung

$$\omega|_U = \omega^\varphi\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Wir nennen ω messbar, wenn die Funktion $\omega^\varphi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesguemessbar ist, für jede Karte (U, φ). Ist (V, ψ) eine andere Karte so gilt auf dem Overlap $U \cap V$

$$\omega^\varphi = \omega^\psi \det D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi.$$

Insbesondere reicht es auch hier aus, wenn die Messbarkeit für einen festen Atlas erfüllt ist.

Sei nun M eine orientierte Mannigfaltigkeit, und $E \subset M$ sei messbar und im Gebiet einer orientierten Karte (U, φ) enthalten. Eine messbare n-Form auf M nennen wir auf E integrierbar, falls

$$\|\omega\|_{L^1(E)} := \int_{\varphi(E)} |\omega^\varphi \circ \varphi^{-1}(x)|\, dx < \infty.$$

Ist das der Fall, so definieren wir das Integral

$$\int_E \omega := \int_{\varphi(E)} \omega^\varphi \circ \varphi^{-1}(x)\, dx \in \mathbb{R}.$$

Diese Definitionen hängen nicht von der Wahl der Karte ab: ist (V, ψ) eine andere orientierte Karte mit $E \subset V$, so gilt auf $U \cap V \supset E$

$$\omega^\psi = \omega^\varphi \det D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi.$$

Mit der Substitution $y = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$ folgt aus dem Transformationssatz zunächst

$$\begin{aligned}\int_{\psi(E)} |\omega^\psi \circ \psi^{-1}(y)|\, dy &= \int_{\varphi(E)} |\omega^\psi \circ \varphi_i^{-1}(x)|\, |\det D(\psi \circ \varphi_i^{-1})(x)|\, dx \\ &= \int_{\varphi(E)} |\omega^\varphi \circ \varphi_i^{-1}(x)|\, dx < \infty.\end{aligned}$$

Da die Karten gleich orientiert sind, also $\det D(\psi \circ \varphi_i^{-1}) > 0$, folgt weiter

$$\begin{aligned}\int_{\psi(E)} \omega^\psi \circ \psi^{-1}(y)\, dy &= \int_{\varphi(E)} \omega^\psi \circ \varphi_i^{-1}(x)\, |\det D(\psi \circ \varphi_i^{-1})(x)|\, dx \\ &= \int_{\varphi(E)} \omega^\varphi \circ \varphi_i^{-1}(x)\, dx.\end{aligned}$$

Folgender Hinweis ist hier angebracht: die Integrierbarkeit und das Integral einer Funktion kann nicht auf diese Weise mittels Karten erklärt werden. Zum Beispiel gilt für die konstante Funktion $f(x) = 1$ auf $\mathbb{R}$ und die Karte $\varphi(x) = \arctan x$

$$\int_{\varphi(\mathbb{R})} f \circ \varphi^{-1}(y)\, dy = \pi \neq \infty = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$

Es ist wesentlich, dass n-Formen ein anderes Transformationsgesetz haben als Funktionen.

Um nun das Integral einer messbaren n-Form ω auf ganz M zu definieren, wählen wir eine höchstens abzählbare messbare Zerlegung $M = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$, so dass $E_i \subset U_i$ für eine orientierte Karte (U_i, φ_i). Das ist immer möglich: nach Satz 1.1 ist M σ-kompakt, also existiert ein orientierter, abzählbarer Atlas (U_i, φ_i). Wir können dann $E_i = U_i \backslash (U_1 \cup \ldots \cup U_{i-1})$ wählen. Wir bezeichnen mit $L^1(\Lambda^n TM)$ den Raum der messbaren n-Formen mit

(7.1) $$\|\omega\|_{L^1(M)} = \sum_{i \in I} \|\omega\|_{L^1(E_i)} < \infty.$$

Das Integral von $\omega \in L^1(\Lambda^n TM)$ definieren wir durch

(7.2) $$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{E_i} \omega.$$

Diese Definitionen hängen wieder nicht von der Wahl der Zerlegung und der Karten ab: sei $M = \bigcup_{j \in J} F_j$ eine andere abzählbare, messbare Zerlegung mit $F_j \subset V_j$ für orientierte Karten $\psi_j : V_j \to \psi_j(V_j)$. Mit dem Satz über monotone Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\sum_{j \in J} \int_{\psi_j(F_j)} |\omega^{\psi_j} \circ \psi_j^{-1}(y)|\, dy &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \int_{\psi_j(E_i \cap F_j)} |\omega^{\psi_j} \circ \psi_j^{-1}(y)|\, dy \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_{\varphi_i(E_i \cap F_j)} |\omega^{\varphi_i} \circ \varphi_i^{-1}(x)|\, dx \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(E_i)} |\omega^{\varphi_i} \circ \varphi_i^{-1}(x)|\, dx < \infty.\end{aligned}$$

Somit ist der Raum $L^1(\Lambda^n TM)$ und die L^1-Norm unabhängig von der Wahl der Zerlegung. Für $\omega \in L^1(\Lambda^n TM)$ folgt analog, aber jetzt mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue,

$$\sum_{j\in J} \int_{\psi_j(F_j)} \omega^{\psi_j} \circ \psi_j^{-1}(y)\, dy = \sum_{i\in I} \int_{\varphi_i(E_i)} \omega^{\varphi_i} \circ \varphi_i^{-1}(x)\, dx.$$

Also ist auch das Integral von ω unabhängig von der Zerlegung definiert. Hier noch drei Bemerkungen zur Definition des Integrals:

(a) Für eine Teilung der Eins η_i, $i \in I$, gilt

$$\int_M \omega = \sum_{i\in I} \int_M \eta_i \omega \qquad \text{für } \omega \in L^1(\Lambda^n TM).$$

(b) Es gilt $C^0_c(\Lambda^n TM) \subset L^1(\Lambda^n TM)$.

(c) Seien M, N orientierte, n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Ist $\phi \in C^1(M,N)$ orientierungstreuer (bzw. orientierungsumkehrender) Diffeomorphismus und $\omega \in L^1(\Lambda^n TN)$, so ist $\phi^*\omega \in L^1(\Lambda^n TM)$ und es gilt

$$\int_M \phi^*\omega = \pm \int_N \omega.$$

Die letzte Aussage wollen wir noch zeigen. Seien (U,φ) und (V,ψ) orientierte Karten von M bzw. N, so dass $\phi(U) \subset V$. Auf U gilt dann

$$\phi^*\omega = \phi^*(\omega^\psi\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n) = \omega^\psi \circ \phi \,\det D(\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Für $E \subset U$ messbar folgt aus dem Transformationssatz mit der Substitution $y = \psi\circ\phi\circ\varphi^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{L^1(\phi(E))} &= \int_{\psi\circ\phi(E)} |\omega^\psi \circ \psi^{-1}(y)|\, dy \\ &= \int_{\varphi(E)} |\omega^\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}(x)|\, |\det D(\psi\circ\phi\circ\varphi^{-1})(x)|\, dx \\ &= \|\phi^*\omega\|_{L^1(E)}. \end{aligned}$$

Weiter berechnen wir, wieder mit dem Transformationssatz,

$$\int_{\phi(E)} \omega = \int_{\varphi(E)} \omega^\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}(x)\, |\det D(\psi\circ\phi\circ\varphi^{-1})(x)|\, dx = \pm \int_E \phi^*\omega.$$

Das Vorzeichen ist je nach Orientierung von ϕ. Sei nun F_j, $j \in J$, eine messbare Zerlegung von N mit $F_j \subset V_j$ für Karten (V_j, ψ_j). Dann ist $E_j = \phi^{-1}(F_j)$ eine messbare Zerlegung von M, und es gilt $E_j \subset U_j$ für die Karten $(U_j = \phi^{-1}(V_j), \varphi_j = \psi_j \circ \phi)$. Da $\phi(U_j) = V_j$ folgt Aussage (c) aus der Rechnung oben durch Summation über $j \in J$.

Um den Satz von Stokes zu formulieren, benötigen wir noch den Begriff der Mannigfaltigkeit mit Rand. Das Standardmodell ist der abgeschlossene Halbraum $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \leq 0\}$, versehen mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie. Die offenen Mengen in H^n sind also genau die Durchschnitte $H^n \cap W$ mit W offen in $\mathbb{R}^n$.

Definition 7.2 (Mannigfaltigkeit mit Rand) *Ein topologischer Raum (Hausdorffsch mit abzählbarer Umgebungsbasis) heißt n-dimensonale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand, falls es einen C^0-Atlas $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$, $i \in I$, gibt mit $\varphi_i(U_i)$ offen in H^n. M heißt differenzierbar, wenn der Atlas C^∞-Kartenwechsel hat.*

Hier ist zuerst zu erklären, wie die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel aufzufassen ist. Für $V \subset H^n$ offen bezeichnen wir mit $C^k(V)$ die Menge aller Funktionen $f \in C^k(\operatorname{int} V)$, deren Ableitungen $D^\alpha f$, $0 \leq |\alpha| \leq k$, stetig auf $V = \operatorname{int} V \cup (\partial H \cap V)$ fortsetzbar sind. Da jeder Punkt in V Häufungspunkt von $\operatorname{int} V$ ist, sind die Fortsetzungen eindeutig bestimmt, wir bezeichnen sie wieder mit $D^\alpha f$. Es gilt mit $\overline{D} = (\partial_2, \ldots, \partial_n)$

$$f|_{\partial H \cap V} \in C^k(\partial H \cap V) \text{ mit } \overline{D}^\alpha(f|_{\partial H \cap V}) = \big(\overline{D}^\alpha f\big)|_{\partial H \cap V} \quad \text{für } 0 \leq |\alpha| \leq k. \tag{7.3}$$

Denn für $\varepsilon \searrow 0$ konvergieren die Funktionen $f_\varepsilon(y) = f(y - \varepsilon e_1)$ lokal auf $\partial H \cap V$ gegen $f(y)$, und alle Ableitungen $\overline{D}^\alpha f_\varepsilon$ konvergieren lokal gleichmäßig gegen $\big(\overline{D}^\alpha f\big)|_{\partial H \cap V}$.

Lemma 7.1 *Seien (U_i, φ_i), $i = 1, 2$, Karten bei $p \in M$. Dann gelten für den Kartenwechsel $\phi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V_2$, wobei $V_i = \varphi_i(U_1 \cap U_2)$, folgende Aussagen:*

(a) $\phi(\operatorname{int} H^n \cap V_1) = \operatorname{int} H^n \cap V_2$,

(b) $\phi(\partial H^n \cap V_1) = \partial H^n \cap V_2$,

(c) $D\phi(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *für alle* $x \in V_1$.

Beweis: Sei $x \in \operatorname{int} H^n \cap V_1$. Angenommen es gibt $B = B_\delta(x) \subset \operatorname{int} H^n$ mit $\phi(B) \subset \partial H^n$. Mit $\psi = \phi^{-1}|_{\partial H^n \cap V_2}$ folgt

$$\mathrm{id}_B = \phi^{-1} \circ \phi|_B = \psi \circ \phi|_B.$$

Nach (7.3) ist ψ differenzierbar, also folgt mit der Kettenregel $\mathrm{E}_n = D\psi(\phi(x))D\phi(x)$. Die Ableitung von ψ hat aber höchstens Rang $n-1$, Widerspruch. Also existiert eine Folge $x_k \to x$ mit $\phi(x_k) \in \operatorname{int} H^n \cap V_2$, und nach Kettenregel gilt

$$\mathrm{E}_n = D\phi^{-1}(\phi(x_k))\, D\phi(x_k).$$

Alle beteiligten Funktionen sind stetig, also gilt auch $\mathrm{E}_n = D\phi^{-1}(\phi(x))D\phi(x)$, und $D\phi(x)$ ist invertierbar. Nach dem Satz über inverse Funktionen ist $\phi(B_\delta(x))$, für $\delta > 0$ klein, offen im $\mathbb{R}^n$. Also ist $\phi(x) \in \operatorname{int} H^n$ bzw. $\phi(\operatorname{int} H^n \cap V_1) \subset \operatorname{int} H^n \cap V_2$. Durch Anwendung auf ϕ^{-1} folgt Aussage (a), und (b) ergibt sich direkt. Für (c) verwenden wir, dass jedes $x \in V_1$ Grenzwert einer Folge $x_k \in V_1 \cap \operatorname{int} H^n$ ist, und argumentieren wie oben. □

Für Punkte $p \in M$ haben wir damit folgende Dichotomie:

- entweder gilt $\varphi(p) \in \operatorname{int} H^n$ für alle Karten bei p, diese Punkte nennen wir innere Punkte (Bezeichnung: $p \in \operatorname{int} M$),
- oder es gilt $\varphi(p) \in \partial H^n$ für alle Karten bei p, diese Punkte heißen Randpunkte (Bezeichnung: $p \in \partial M$).

Die Mengen $\operatorname{int} H^n$ und ∂H^n sind bezüglich der Topologie auf $\mathbb{R}^n$ wie üblich definiert. Für die Mengen $\operatorname{int} M$ und ∂M ist das anders, denn M ist a priori gar nicht Teilmenge irgendeines topologischen Raums.

Man sieht leicht, dass jede Teilmenge einer Mannigfaltigkeit mit der induzierten Topologie Hausdorffsch ist und eine abzählbare Basis hat, siehe Beispiel 1.3 und Satz 1.1. Indem wir das Gebiet der Karte gegebenenfalls verkleinern, haben wir zu jedem $p \in \operatorname{int} M$ eine Karte (U, φ) bei p mit $\varphi(U) \subset \operatorname{int} H^n$, das heißt $\varphi(U)$ ist offen im $\mathbb{R}^n$. Damit ist $\operatorname{int} M$ eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Auf ∂M haben wir den C^0-Atlas

$$\varphi|_{\partial M \cap U} : \partial M \cap U \to \partial H^n \cap \varphi(U).$$

Hier ist $\varphi(U)$ offen in H^n, das heißt es gibt $W \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\varphi(U) = H^n \cap W$, also ist $\partial H^n \cap \varphi(U) = \partial H^n \cap W$ offen in $\partial H^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Nach (7.3) sind die Kartenwechsel differenzierbar, also ist ∂M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$.

Die Definition des Tangentialbündels, siehe Satz 4.1, ist auch im Fall einer n-dimensionalen, differenzierbaren Mannigfaltigkeit M mit Rand anwendbar. Dabei ist wesentlich, dass nach Lemma 7.1 die Kartenwechsel invertierbare Ableitung haben, auch in Randpunkten. Ist (U, φ) eine Karte, so haben wir insbesondere wieder die Basisfelder

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = D\varphi(p)^{-1} e_j \quad \text{für } p \in U.$$

Sei nun $p \in \partial M$, und $v \in T_pM$ habe die Basisdarstellung

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_\varphi^j \frac{\partial}{\partial x^j}(p).$$

Ist $v_\varphi^1 > 0$, so nennen wir v nach außen weisend. Dieser Begriff hängt nicht von der Karte ab. Setze dazu $x = \varphi(p)$ und betrachte eine andere Karte (V, ψ) bei p. Nach (3.6), mit $f = \mathrm{id}_M$ und $\phi = \psi \circ \varphi^{-1}$, gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}(x) \frac{\partial}{\partial y^i}(p).$$

Wir haben $\phi^1 \leq 0$ auf $\varphi(U)$ und $\phi^1 = 0$ auf $\varphi(U) \cap \partial H$. Daraus folgt

$$\frac{\partial \phi^1}{\partial x^j}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 2, \ldots, n \\ \geq 0 & \text{für } j = 1. \end{cases}$$

Für $j \geq 2$ beachte (7.3), für $j = 1$ wende den Mittelwertsatz an auf $\phi^1(x + te_1)$ mit $t < 0$:

$$0 \leq \frac{\phi^1(x) - \phi^1(x + te_1)}{0 - t} = \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1}(x + \tau e_1) \xrightarrow{t \nearrow 0} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1}(x).$$

Tatsächlich gilt für $j = 1$ die strikte Ungleichung, sonst wäre $D\phi(x)$ nicht surjektiv im Widerspruch zu Lemma 7.1(c). Für die Basisdarstellung $v = \sum_{i=1}^n v_\psi^i \frac{\partial}{\partial y^i}(p)$ folgt

$$v_\psi^1 = \sum_{j=1}^{n} v_\varphi^j \frac{\partial \phi^1}{\partial x^j}(x) = v_\varphi^1 \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1}(x) > 0.$$

Sei nun σ eine Orientierung auf M. Wir definieren auf ∂M eine induzierte Orientierung $\sigma_{\partial M}$. Für $p \in \partial M$ sei $v \in T_pM$ nach außen weisend. Dann setzen wir

$$\sigma_{\partial M}(p) = [v_2, \ldots, v_n] \quad \text{falls} \quad \sigma(p) = [v, v_2, \ldots, v_n]. \tag{7.4}$$

Ist (U, φ) eine Randkarte von M, so sind die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ positiv orientiert, denn $\frac{\partial}{\partial x^1}$ weist nach außen. Also ist der induzierte Atlas von ∂M positiv orientiert.

Beispiel 7.1 Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist D eine orientierte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ∂D. Für $(x,y) \in \partial D$ ist der Vektor $(-y,x)$ positiv orientiert, denn der Vektor (x,y) weist nach außen, und $(x,y),(-y,x)$ ist eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$.

Der folgende Satz wird üblicherweise als allgemeiner Satz von Stokes bezeichnet. Tatsächlich betrachtete Stokes ein Vektorfeld X auf $\mathbb{R}^3$, mit zugehörigem Rotationsfeld $\operatorname{rot} X$. Für eine parametrisierte Fläche M gilt dann (1854): das Kurvenintegral von X längs ∂M ist gleich dem Fluss des Felds $\operatorname{rot} X$ durch die Fläche M, also in klassischer Notation

$$\int_{\partial M} X \cdot \overrightarrow{ds} = \int_M \operatorname{rot} X \cdot \overrightarrow{dA}.$$

Die sogenannte Vektoranalysis mit den Operatoren div und rot hat übrigens Maxwell eingeführt (1873). Die erste höherdimensionale Version des Satzes von Stokes stammt von Volterra (1889). Der Kalkül der Differentialformen wurde von Poincaré und Élie Cartan um 1900 entwickelt. Dieser hat dann in seinen Vorlesungen 1936-37 die moderne Fassung des Satzes von Stokes formuliert und diese später auch publiziert.*

Satz 7.1 (Stokes-Cartan) *Sei M eine n-dimensionale, orientierte und kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Dann gilt für $\omega \in C^1(\Lambda^{n-1} TM)$*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega. \tag{7.5}$$

Dabei ist $i : \partial M \to M$ die Inklusionsabbildung, und ∂M hat die induzierte Orientierung.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass ω eine Form mit kompaktem Träger auf H^n ist. Wir schreiben dann

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \omega_i \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge \widehat{dx^i} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Es folgt $d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, und damit

$$\begin{aligned}
\int_{H^n} \omega &= = \int_{H^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1}(x^1, y) \, dx^1 \, dy + \sum_{i=2}^n \int_{-\infty}^0 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x^1, y) \, dy}_{=0} \, dx^1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1(0, y) \, dy.
\end{aligned}$$

Für die Karte $\varphi : \partial H \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\varphi(0,y) = y$, gilt $\frac{\partial}{\partial y^i}(0,y) = D\varphi^{-1}(y) e_i = e_{i+1}$, also ist φ positiv orientiert. Wir berechnen $(i^*\omega)(0,y) = \omega_1(0,y) \, dy^1 \wedge \ldots dy^{n-1}$, also folgt

$$\int_{\partial H^n} i^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1(0,y) \, dy.$$

*Elie Cartan: Les systèmes différentielles extérieurs et leurs applications géometriques, Hermann Paris 1945.

Im Fall dass ω kompakten Träger auf $\mathbb{R}^n$ hat, verschwindet das Integral. Als nächstes betrachte den Fall dass ω kompakten Träger im Gebiet einer orientierten Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $\varphi(U)$ offen in H^n hat. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_{H^n} (\varphi^{-1})^* d\omega = \int_{H^n} d(\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\partial H^n} i^*_{\partial H^n}(\varphi^{-1})^*\omega,\\ \int_{\partial M} i^*_{\partial M}\omega &= \int_{\partial H^n} (\varphi|^{-1}_{\partial M})^* i^*_{\partial M}\omega.\end{aligned}$$

Da $\varphi^{-1} \circ i_{\partial H^n} = i_{\partial M} \circ \varphi|^{-1}_{\partial M}$, folgt die Behauptung. Wir kommen schließlich zum allgemeinen Fall. Da M kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung U_λ, $\lambda \in \Lambda$, mit Koordinatenumgebungen. Sei η_j, $j \in J$, eine lokal endliche untergeordnete Teilung der Eins, das heißt zu $j \in J$ gibt es ein $\lambda \in \Lambda$ mit $\operatorname{spt} \eta_j \subset\subset U_\lambda$. Es folgt

$$\int_M d\omega = \int_M d\Big(\sum_{j\in J} \eta_j\omega\Big) = \sum_{j\in J}\int_M d(\eta_j\omega) = \sum_{j\in J}\int_{\partial M} i^*(\eta_j\omega) = \int_{\partial M} i^*\omega.$$

Der Satz ist bewiesen. $\square$

Wenn man an Ästhetik interessiert ist, kann man den pullback im Satz auch unterdrücken. Bei aller Begeisterung muss gesagt werden, dass die wesentliche Arbeit für diese Aussage im Kalkül der Differentialformen und in der Definition der Begriffe (Mannigfaltigkeit, Orientierung, Rand,...) steckt. Am Ende ist alles so arrangiert, dass sich der Satz auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung reduziert. Ich denke, dass die Aussage oft als black box benutzt wird.

8 Definition der Riemannschen Mannigfaltigkeit

Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für $p \in M$ bezeichnen wir mit $T^{2,0}_p M$ den Vektorraum der Bilinearformen auf T_pM, und betrachten das Bündel

$$T^{2,0}M = \bigcup_{p\in M} T^{2,0}_p M.$$

Allgemeiner bezeichnet $T^{r,0}_p M$ den Raum der r-linearen Formen auf TM, und $T^{r,1}_p M$ den Raum der r-linearen Abbildungen mit Werten in T_pM, zum Beispiel $T^{1,1}_p M = \operatorname{End}(TM)$. Aber hier geht es nur um Bilinearformen.

Die Bündelprojektion $\pi : T^{2,0}M \to M$ ist natürlich $\pi(b) = p$ für $b \in T^{2,0}_p M$. Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit Feldern $\frac{\partial}{\partial x^i}$ haben wir die Basisformen

$$dx^i \otimes dx^j \in T^{2,0}U, \ \ (dx^i \otimes dx^j)(v,w) = v^i w^j \quad \text{wobei } 1 \le i,j \le n.$$

Ein Schnitt $b : M \to T^{2,0}M$, also $b(p) \in T^{2,0}_p M$, hat die lokale Darstellung

$$b = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}\, dx^i \otimes dx^j, \qquad \text{mit } b_{ij} = b\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) : U \to \mathbb{R}.$$

Definition 8.1 (Riemannsche Metrik) *Ein Schnitt $g \in C^\infty(T^{2,0}M)$ heißt Riemannsche Metrik, wenn für jedes $p \in M$ die Bilinearform $g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt ist, also symmetrisch und positiv definit.*

Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ haben wir die Matrixfunktion

$$G : U \to \mathbb{R}^{n \times n},\ G(p) = \big(g_{ij}(p)\big)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Der Schnitt $g \in C^\infty(T^{2,0}M)$ ist genau dann eine Riemannsche Metrik, wenn für jede Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ und jedes $p \in U$ die Matrix $G(p)$ symmetrisch und positiv definit ist, also

$$g_{ij}(p) = g_{ji}(p) \text{ für } 1 \leq i,j \leq n \quad \text{ und } \quad \langle G(p)v, v\rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) v^i v^j > 0 \quad \text{ für } v \neq 0.$$

Ist $\psi : V \to \psi(V)$, $y = \psi(p)$, eine weitere Karte, so gilt auf dem Overlap $U \cap V$ nach (3.6)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} \quad \text{ mit } \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(\psi^k \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}|_{x=\varphi(p)}.$$

Daraus folgt für eine Riemannsche Metrik g (bzw. jede Bilinearform), vgl. (3.9),

$$g_{ij}^\varphi = g\big(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\big) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i}\frac{\partial \psi^l}{\partial x^j} g_{kl}^\psi,$$

oder in Matrixschreibweise

$$G^\varphi = DF^{\mathrm{T}} \circ \varphi\ G^\psi\ DF \circ \varphi \quad \text{ mit } F = \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}.$$

Satz 8.1 (Riemannsches Volumen) *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Maß μ_g, das Volumenmaß von g, mit*

$$\mu_g(E) = \int_{\varphi(E)} \sqrt{\det G}\,(\varphi^{-1}(x))\,dx,$$

falls $\varphi : U \to \varphi(U)$ Karte und $E \subset U$ Lebesgue-messbar.

Beweis: Sei $\psi : V \to \psi(V)$ andere Karte mit $E \subset V$, und $F = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$. Die Transformationsformel der Metrik ergibt

$$(\det G^\varphi) \circ \varphi^{-1} = \det\big(DF^{\mathrm{T}} G^\psi \circ \varphi^{-1} \det DF\big) = (\det G^\psi) \circ \varphi^{-1} |\det DF|^2.$$

Mit Substitution $y = F(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$ folgt aus dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(E)} \sqrt{\det G}(\varphi^{-1}(x))\,dx &= \int_{\varphi(E)} \sqrt{\det G^\psi}(\varphi^{-1}(x))|\det DF(x)|\,dx \\
&= \int_{F(\varphi(E))=\psi(E)} \sqrt{\det G^\psi}(\psi^{-1}(y))\,dy.
\end{aligned}$$

Wähle nun eine messbare Zerlegung $M = \bigcup_{i \in I} E_i$, wobei jedes E_i in einem Kartengebiet liegt, und setze für $E \subset M$ messbar

$$\mu_g(E) = \sum_{i \in I} \mu_g(E \cap E_i).$$

Es ist leicht zu sehen, dass μ_g ein wohldefiniertes Maß auf M ist. $\square$

Weitere assoziierte Größen sind

- die Länge $\|v\| = \sqrt{g(p)(v,v)}$ eines Vektors $v \in T_pM$
- der Winkel $\angle(v,w) = \arccos g(p)(v,w)$ zwischen $v, w \in T_pM$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$.

Lemma 8.1 *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit.*

(a) *Sei $f \in C^1(M)$, und $\operatorname{grad}_g f(p)$ bezeichne den eindeutigen Vektor in T_pM mit*

$$g(p)(\operatorname{grad}_g f(p), v) = Df(p)v \quad \text{für alle } v \in T_pM.$$

Dann gilt bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$

$$\operatorname{grad}_g f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \text{wobei } g^{ij} := (G^{-1})_{ij}.$$

Insbesondere ist $\operatorname{grad}_g f \in C^{k-1}(TM)$ falls $f \in C^k(M)$, $k \geq 1$.

(b) *Zu $X \in C^1(TM)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $\operatorname{div}_g X \in C^0(M)$ mit*

$$\int_M g(\operatorname{grad}_g \eta, X)\, d\mu_g = -\int_M \eta \operatorname{div}_g X \, d\mu_g \quad \text{für alle } \eta \in C_c^\infty(M).$$

Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ gilt

$$(\operatorname{div}_g X) \circ \varphi^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \big(\sqrt{\det G}\, X^i \circ \varphi^{-1}\big).$$

Insbesondere ist $\operatorname{div}_g X \in C^{k-1}(M)$ falls $X \in C^k(TM)$.

Beweis: Für (a) berechnen wir

$$g\Big(\sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \underbrace{\sum_{j=1}^n g^{ij} g_{jk}}_{=\delta^i_k} = \frac{\partial f}{\partial x^k} = df\big(\frac{\partial}{\partial x^k}\big).$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechung gilt die Implikation

$$\int_M \eta f \, d\mu_g = 0 \text{ für alle } \eta \in C_c^\infty(M) \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

Somit ist die gesuchte Funktion in (b) eindeutig bestimmt; wir definieren $\operatorname{div}_g X$ auf dem Gebiet einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ durch die Formel. Dann gilt für $\eta \in C_c^\infty(U)$

$$g(\operatorname{grad}_g \eta, X) = D\eta \cdot X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x^i} X^i.$$

Es folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_M g(\operatorname{grad}_g \eta, X)\, d\mu_g &= \int_{\varphi(U)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\eta \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} X^i \circ \varphi^{-1} \sqrt{\det G}\, dx \\
&= -\int_{\varphi(U)} \eta \circ \varphi^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \big(X^i \circ \varphi^{-1} \sqrt{\det G}\big)\, dx \\
&= -\int_U \eta \operatorname{div}_g X \, d\mu_g.
\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit stimmen die Formeln für zwei Karten auf den Overlaps überein. Für $\eta \in C_c^\infty(M)$ überdecke den Träger mit Kartengebieten und verwende eine untergeordnete Teilung der Eins. $\square$

Lemma 8.2 *Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Dann gibt es auf ∂M ein eindeutig bestimmtes Normalenfeld $\nu : \partial M \to TM$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\nu(p) \perp T_p(\partial M)$ *bezüglich* g,

(2) $\|\nu(p)\| = 1$,

(3) $\nu(p)$ *weist nach außen.*

Beweis: Sei $\varphi : U \to \varphi(U) \subset H^n$ Randkarte von M. Betrachte $N : \partial M \cap U \to TM$, $N = \sum_{j=1}^n g^{j1} \frac{\partial}{\partial x^j}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, N\Big) &= \sum_{j=1}^n g_{ij} g^{j1} = 0 \qquad \text{für } i = 2, \ldots, n, \\ g(N, N) &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij} g^{i1} g^{j1} = g^{11}, \\ \langle D\varphi(p) N, e_1 \rangle &= g^{11} > 0. \end{aligned}$$

Somit hat das Vektorfeld $\nu : \partial M \cap U \to TM$, $\nu = N/\sqrt{g^{11}}$, alle gewünschten Eigenschaften. Wegen Eindeutigkeit stimmen diese Definitionen auf den Overlaps überein. $\square$

Satz 8.2 (Riemannscher Satz von Gauß) *Sei (M, g) kompakte Riemannsche Mannighfaltigkeit mit Rand ∂M. Dann gilt für $X \in C^1(TM)$*

$$\int_M \mathrm{div}_g X \, d\mu_g = \int_{\partial M} g(X, \nu) \, d\sigma_g. \tag{8.6}$$

Dabei ist σ_g das Riemannsche Oberflächenmaß auf ∂M, und ν die Riemannsche äußere Normale.

Beweis: Mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Fall 1: spt X liegt im Gebiet einer inneren Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$

$$\int_M \mathrm{div}_g X \, d\mu_g = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \big(\sqrt{\det G} X^i\big) \sqrt{\det G} \, dx = 0.$$

Fall 2: spt X liegt im Gebiet einer Randkarte $\varphi : U \to \varphi(U)$

$$\begin{aligned} \int_M \mathrm{div}_g X \, d\mu_g &= \int_{\partial H^n} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x^1} \big(\sqrt{\det G}\big)(x^1, y) \, dx^1 \, dy \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \int_{-\infty}^0 \int_{\partial H^n} \frac{\partial}{\partial x^i} \big(\sqrt{\det G} \, X^i\big)(x^1, y) \, dy \, dx^1 \\ &= \int_{\partial H^n} \big(\sqrt{\det G} \, X^1\big)(0, y) \, dy. \end{aligned}$$

Für das Randintegral berechnen wir mit Lemma 8.2

$$g(X,\nu) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} X^i \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} g^{1j} = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} X^1.$$

Das Oberflächenmaß ist $d\sigma_g = \sqrt{\det \widehat{G}_{11}}$, wobei sich $\widehat{G}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ aus G durch Streichen der ersten Zeile und Spalte ergibt. Mit der Cramerschen Regel folgt

$$g(X,\nu)\, d\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \sqrt{\det \widehat{G}_{11}}\, X^1\, dy = \sqrt{\det G}\, dy.$$

Fall 3: $X \in C^1(TM)$ beliebig
Überdeckung von M mit endlich vielen Kartengebiete und untergeordnete Teilung der Eins.

$\square$

Ist M orientierbar, so können wir die Riemannsche Volumenform $\omega_g \in C^\infty(\Lambda^n TM)$ definieren, bezüglich einer orientierten Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ lautet sie

$$\omega_g = \sqrt{\det G^\varphi}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Ist $\psi : V \to \psi(V)$, $y = \psi(p)$, eine andere Karte, so gilt mit $F = \psi \circ \varphi^{-1}$

$$\begin{aligned} G^\varphi &= DF^{\mathrm{T}} \circ \varphi\, G^\psi\, DF \circ \varphi \\ dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n &= \det DF \circ \varphi\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \\ \sqrt{\det G^\varphi}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n &= \operatorname{sign}(\det DF \circ \varphi) \sqrt{\det G^\psi}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n. \end{aligned}$$

Indem wir einen orientierten Atlas verwenden, ist ω_g wohldefiniert, und es gilt

$$\int_M f\, \omega_g = \int_M f\, d\mu_g.$$

Betrachte nun für $X \in C^1(TM)$ die $(n-1)$-Form

$$X \llcorner \omega_g(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \omega_g(X, v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

In lokalen Koordinaten gilt

$$X \llcorner \omega_g = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\det G}\, X^i (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Wir berechnen damit

$$d(X \llcorner \omega_g) = (\operatorname{div}_g X)\, \omega_g. \tag{8.7}$$

Weiter gilt bezüglich einer Randkarte $X^\top \llcorner \omega_g = 0$, also

$$i^*_{\partial M}(X \llcorner \omega_g) = g(X,\nu)\; i^*_{\partial M}(\nu \llcorner \omega_g).$$

$i^*_{\partial M}(\nu \llcorner \omega_g)$ ist aber die Oberflächenform auf ∂M, denn

$$\begin{aligned} i^*_{\partial M}(\nu \llcorner \omega_g) &= \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{g^{1j}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big) \\ &= \sqrt{\det G}\, \sqrt{g^{11}} = \sqrt{\det \widehat{G}_{11}}, \end{aligned}$$

wieder nach der Cramerschen Regel. Also haben wir gezeigt

$$i_{\partial M}^*(X \llcorner \omega_g) = g(X,\nu)\,\omega_g^{\partial M}. \tag{8.8}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \int_M d(X \llcorner \omega_g) &= \int_M \mathrm{div}_g X\,\omega_g = \int_M \mathrm{div}_g X\,d\mu_g, \\ \int_{\partial M} i_{\partial M}^*(X \llcorner \omega_g) &= \int_{\partial M} g(X,\nu)\,\omega_g^{\partial M} = \int_{\partial M} g(X,\nu)\,d\sigma_g. \end{aligned}$$

Zur Relation der beiden Sätze: aus Gauß folgt Stokes. Denn eine Riemannsche Metrik gibt es immer, siehe unten, und eine gegebene $(n-1)$-Form ξ kann als $X \llcorner \omega_g$ geschrieben werden, wähle dazu in Koordinaten

$$X^i = \frac{1}{\sqrt{\det G}}\,\xi_i \quad \text{wobei } \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Umgekehrt gilt auch: aus Stokes folgt Gauss, allerdings mit der kleinen Einschränkung dass M orientierbar sein muss, was im Satz von Gauß a priori nicht der Fall ist.

Satz 8.3 (Existenz Riemannscher Metriken) *Auf jeder n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit gibt es eine (glatte) Riemannsche Metrik.*

Beweis: Sei $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \varphi_\lambda(U_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, ein lokal endlicher Atlas von M, vgl. Satz 1.1. Wähle auf U_λ die glatte Riemannsche Metrik

$$g_\lambda = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i, \qquad \text{wobei } x^i = \varphi_\lambda^i.$$

Wähle eine Teilung der Eins $\eta_\lambda \in C^\infty(M)$, $0 \leq \eta_\lambda \leq 1$, mit $\operatorname{spt}\eta_\lambda \subset U_\lambda$, und setze

$$g = \sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda\,g_\lambda.$$

Dann ist $g \in C^\infty(T^{2,0}M)$ symmetrisch, und es gilt für $X \in TM$, mit $p = \pi(X)$,

$$g(X,X) = \sum_{\lambda \in \Lambda : p \in U_\lambda} \underbrace{\eta_\lambda(p)}_{\geq 0}\,\underbrace{g_\lambda(p)(X,X)}_{>0} \geq 0.$$

Es ist $\eta_\lambda(p) > 0$ für wenigstens ein λ, daraus folgt die strikte Ungleichung. □

Definition 8.2 *Sei (N,h) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ eine Immersion, also* $\operatorname{rang} Df = \dim M$ *und insbesondere* $\dim M \leq \dim N$.

(a) *Dann ist $g(X,Y) = h(Df \cdot X, Df \cdot Y)$ eine Riemannsche Metrik auf M, sie heißt Pullback von h unter f (Bezeichnung: $g = f^*h$).*

(b) *Ist g gegebene Riemannsche Metrilk auf M und ist $g = f^*h$, so heißt $f : (M,g) \to (N,h)$ isoimetrische Immersion.*

(c) *Ein Diffeomorphismus $f : (M, g) \to (N, h)$ mit $g = f^*h$ heißt Isometrie.*

Die Klassifikation Riemannscher Mannigfaltigkeiten ist, im Vergleich zur Klassifikation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, ein viel umfangreicheres Problem, denn es gibt auf einer differenzierbaren Mannifaltigkeiten viele Metriken, die nicht isometrisch sind. Trotzdem können Riemannsche Metriken helfen, wenn es um die differenzierbare Klassifikation geht. Die Idee ist, dass gewisse Normalformen von Metriken konstruiert werden, etwa Metriken konstanter Krümmung. Das war jedenfalls für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten sehr erfolgreich, und ist grundsätzlich auch der Ansatz für 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Wir kommen jetzt zu einem weiteren Aspekt, nämlich der Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit als metrischer Raum. Sei $c : [a, b] \to M$ eine stückweise C^1-Kurve, das heißt $c \in C^0([a, b], M)$ und es gibt eine Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_N \leq b$, so dass c auf jedem Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq N$, von der Klasse C^1 ist. Insbesondere existieren in den t_i die links- und rechtsseitigen Ableitungen, sie müssen aber nicht übereinstimmen. Wir bezeichnen den Raum dieser Kurven mit $PC^1([a, b], M)$.

Definition 8.3 (Bogenlänge und Abstand) *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Länge einer Kurve $c \in PC^1([a, b], M)$ ist*

$$L_g(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_g \, dt. \tag{8.9}$$

Der Riemannsche Abstand von zwei Punkten $p, q \in M$ ist

$$d(p, q) = \inf \big\{ L_g(c) : c \in PC^1([a, b], M),\, c(a) = p,\, c(b) = q \big\}. \tag{8.10}$$

Ist $c(t)$ im Gebiet einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, so lautet das Bogenlängenintegral

$$L_g(c) = \int_a^b \Big(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(c(t))\, (c^i)'(t)(c^j)'(t) \Big)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Beispiel 8.1 Im $\mathbb{R}^n$ gilt $d(p, q) = |p - q|$. Im Fall $p = q$ ist das klar, für $p \neq q$ betrachte dazu

$$e = \frac{q - p}{|q - p|}, \qquad \text{also } |e| = 1.$$

Sei $c \in PC^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit $c(a) = p$, $c(b) = q$. Mit Cauchy-Schwarz und dem Hauptsatz folgt

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)| \, dt \geq \int_a^b \langle c'(t), e \rangle \, dt = [\langle c(t), e \rangle]_{t=a}^{t=b} = |q - p|.$$

Andererseits können wir die Stecke $c(t) = (1 - t)q + tp$, $t \in [0, 1]$, als Verbindungskurve wählen, diese hat die Länge $|p - q|$.

Beispiel 8.2 In $M = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gilt ebenfalls $d(p, q) = |p - q|$. Die untere Schranke ist klar, und für $p, q \in M$ können wir wieder die Strecke als Verbindungskurve wählen, es sei denn der Nullpunkt liegt auf der Strecke. In diesem Fall können wir aber den Nullpunkt umgehen, indem wir ein kleines Stück durch einen Halbkreis ersetzen. Wir erhalten so eine Folge von Kurven, deren Länge gegen $|p - q|$ konvergiert. Man kann sich überlegen, dass das Infimum $|p - q|$ in diesem Fall nicht angenommen wird.

Beispiel 8.3 In $\mathbb{S}^n$, versehen mit der induzierten Euklidischen Metrik, gilt

$$d(p,q) = \arccos\langle p,q\rangle \in [0,\pi].$$

Ein Großkreis ist nach Definition ein Schnitt der Sphäre mit einer 2-Ebene durch den Nullpunkt. Im Fall $q \neq \pm p$ spannen p,q eine solche Ebene auf, und sie zerlegen den Großkreis in zwei Bögen. Der Abstand ist die Länge des kürzeren Bogens (so die Behauptung). Um das zu beweisen, sei $c : [a,b] \to \mathbb{S}^n$ von p nach q gegeben. Die tangentiale Komponente von p im Punkt $c(t)$ ist

$$p^\top = p - \langle p, c(t)\rangle c(t), \qquad \text{insbesondere } |p^\top| = \sqrt{1-\langle p,c(t)\rangle^2}.$$

Es gilt wieder mit Cauchy-Schwarz und Hauptsatz

$$\begin{aligned}
L(c) &= \int_a^b |c'(t)|\,dt \\
&\geq -\int_a^b \Big\langle \frac{p^\top}{|p^\top|}, c'(t)\Big\rangle\,dt \\
&= -\int_a^b \frac{\langle p, c'(t)\rangle}{\sqrt{1-\langle p,c(t)\rangle^2}}\,dt \qquad (\text{da } c'(t) \text{ tangential}) \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\arccos\langle p,c(t)\rangle\,dt = \arccos\langle p,q\rangle.
\end{aligned}$$

Die Abschätzung gilt so nur wenn $c(t) \neq \pm p$ für alle $t \in (a,b)$, denn für $c(t) = \pm p$ wird das Integral singulär. Das ist aber keine Einschränkung, wie man leicht sieht.

Satz 8.4 (Riemannscher Abstand) *Sei (M,g) eine zusamenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist*

$$d(p,q) = \inf\big\{L_g(c) : c \in PC^1([a,b],M),\ c(a) = p,\ c(b) = q\big\}$$

eine Metrik auf M, und die zugehörige Topologie ist gleich der gegebenen Topologie auf M.

Beweis: Es ist klar, dass $d(p,q)$ nichtnegativ und symmetrisch ist, und dass die Dreicksungleichung gilt. Es bleibt zu zeigen, dass $d(p,q) < \infty$ und $d(p,q) > 0$ für $p \neq q$.

Für das erste sei $p \in M$ fest, und $A \subset M$ sei die Menge aller $q \in M$, die mit p durch eine stückweise C^1-Kurve verbindbar sind. Zu $q \in M$ gibt es eine Karte $\varphi : U_q \to B_1(0)$ mit $\varphi(q) = 0$. Aus $q \in A$ folgt dann $U_q \subset A$, also ist A offen. Andererseits folgt aus $q \in M\backslash A$ auch $U_q \subset M\backslash A$, somit ist $M\backslash A$ auch offen. Da $p \in A$ folgt $A = M$, und hieraus $d(p,q) < \infty$.

Für die zweite Aussage wähle zu $p \in M$ eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $\varphi(p) = 0$ und $\overline{B_1(0)} \subset \varphi(U)$. Die Funktion

$$f : \overline{B_1(0)} \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R},\ f(x,v) = \Big(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) v^i v^j\Big)^{\frac{1}{2}} =: \|v\|_{g(x)},$$

ist stetig und strikt positiv. Da $\overline{B_1(0)} \times \mathbb{S}^{n-1}$ kompakt ist, gibt es $\lambda, \Lambda \in (0,\infty)$ mit

$$\lambda|v| \leq \|v\|_{g(x)} \leq \Lambda|v| \qquad \text{für alle } (x,v) \in \overline{B_1(0)} \times \mathbb{R}^n.$$

Das folgt direkt für $|v| = 1$, und dann für $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig durch Skalierung. Sei $c \in PC^1([a,b], M)$ Kurve von p nach q, und $c(t) \in \varphi^{-1}(\overline{B_1(0)})$ für $t \in [0,\tau]$. Dann gilt

$$L_g(c) \geq L_g(c|_{[0,\tau]}) = \int_0^\tau \|(\varphi \circ c)'(t)\|_{g(\varphi \circ c(t))}\, dt \geq \lambda \int_0^\tau |(\varphi \circ c)'(t)|\, dt \geq \lambda\, |\varphi(c(\tau))|.$$

Also gilt die Abschätzung

$$d(p,q) \geq \begin{cases} \lambda|\varphi(q)| & \text{falls } q \in \varphi^{-1}(B_1(0)),\\ \lambda & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $\varrho \in (0, \lambda]$ folgen die Implikationen

$$q \in \varphi^{-1}(B_{\frac{\varrho}{\Lambda}}(0)) \quad \Rightarrow \quad d(p,q) < \varrho \quad \Rightarrow \quad q \in \varphi^{-1}(B_{\frac{\varrho}{\lambda}}(0)).$$

Mengen dieses Typs erzeugen jeweils die Topologie, also stimmen die metrische und die gegebene Topologie überein. $\square$

In Satz 2.2 haben wir die Operation einer Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M betrachtet. Ist die Operation eigentlich diskontinuierlich, so ist M/Γ eine Mannigfaltigkeit und $\pi : M \to M/\Gamma$ eine Überlagerung. Jetzt ergänzen wir den Satz im Fall, dass die Diffeomorphismen Isometrien sind.

Satz 8.5 (Riemannsche Überlagerung) *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, auf der die Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(g)$ eigentlich diskontinuierlich operiert. Dann gibt es auf M/Γ genau eine Riemannsche Metrik $\overline{g}$, so dass $\pi : (M, g) \to (M/\Gamma, \overline{g})$ isometrisch ist.*

Beweis: Die Projektion $\pi : (M, g) \to (M/\Gamma, \overline{g})$ ist genau dann isometrisch, wenn für alle $x \in M/\Gamma$ und alle $p \in M$ mit $\pi(p) = x$ gilt:

$$\overline{g}(x)(X_1, X_2) = g(p)(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \quad \text{falls } D\pi(p)\tilde{X}_i = X_i \text{ für } i = 1, 2. \tag{8.11}$$

Insbesondere ist $\overline{g}$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt wähle zu $x \in M/\Gamma$ ein $p \in M$ mit $\pi(p) = x$, und definiere $\overline{g}(x)$ durch (8.11). Das Ergebnis hängt nicht von der Wahl von p ab: zu $q \in M$ mit $\pi(q) = x$ gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(p) = q$, und es gilt

$$D\pi(q)D\gamma(p)\tilde{X}_i = D(\pi \circ \gamma)(p)\tilde{X}_i = D\pi(p)\tilde{X}_i = X_i.$$

Ist nun $D\pi(q)\tilde{Y}_i = X_i$, so folgt $\tilde{Y}_i = D\gamma(p)\tilde{X}_i$ und weiter $g(q)(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = g(p)(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$, da γ eine Isometrie ist. Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{g}$ glatt ist. Nach Satz 2.2 gibt es zu $p \in M$ eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$, so dass $\pi|_U : U \to \pi(U)$ diffeomorph ist. Es folgt

$$\pi^*\overline{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \overline{g} \circ \pi \left(D\pi \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}, D\pi \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ij} \in C^\infty(U).$$

$\square$

Zum Schluss des Kapitels wollen wir einen Spezialfall genauer studieren. Für eine Basis v_1, v_2 von $\mathbb{R}^2$ betrachten wir das Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$, das auf $\mathbb{R}^2$ durch Translationen operiert; wir haben dann die Riemannsche Überlagerung $\pi_\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$. Ist $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$, so ist $\Gamma' = A\Gamma$ wieder ein Gitter und A induziert eine Abbildung

$$\varphi_A : \mathbb{R}^2/\Gamma \to \mathbb{R}^2/\Gamma',\ \varphi_A([z]_\Gamma) = [Az]_{\Gamma'} \quad \text{wobei } \Gamma' = A\Gamma.$$

φ_A ist wohldefiniert, denn für $\gamma \in \Gamma$ gilt $[A(z+\gamma)]_{\Gamma'} = [Az + A\gamma]_{\Gamma'} = [Az]_{\Gamma'}$. Ist auch $B \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ und $\Gamma'' = B\Gamma'$, so folgt

$$\varphi_B \circ \varphi_A([z]_\Gamma) = \varphi_B([Az]_{\Gamma'}) = [BAz]_{\Gamma''} = \varphi_{BA}([z]).$$

Also ist φ_A bijektiv mit $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$. Nach Definition gilt $\varphi_A \circ \pi_\Gamma = \pi_{\Gamma'} \circ A$ und π_Γ ist lokal diffeomorph, also sind die φ_A glatt. Die $\mathbb{R}^2/\Gamma$ sind damit diffeomorph zu $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, man bezeichnet sie als flache Tori, weil ihre Metrik lokal Euklidisch ist. Es gilt $\pi_\Gamma^* \varphi_A^* g_{\Gamma'} = A^* \pi_{\Gamma'}^* g_{\Gamma'} = A^* g_{\mathbb{R}^2}$, beziehungweise bezüglich der Standardbasis

$$\varphi_A^* g_{\Gamma'}(D\pi_\Gamma \cdot e_i, D\pi_\Gamma \cdot e_j) = g_{\mathbb{R}^2}(Ae_i, Ae_j) \quad \text{für } 1 \leq i,j \leq 2.$$

Für $A = \lambda S$ mit $\lambda > 0$ und $S \in \mathbb{O}(2)$ folgt $\varphi_A^* g_{\Gamma'} = \lambda^2 g_\Gamma$.

Definition 8.4 (konforme Äquivalenz) *$\varphi : (M,g) \to (N,h)$ heißt konform, wenn es eine Funktion $\lambda : M \to (0,\infty)$ gibt mit $\varphi^* h = \lambda^2 g$. Ist φ zusätzlich diffeomorph, so heißt φ konforme Äquivalenz.*

Werden g, h mit positiven Funktionen multipliziert, so ändert sich der sogenannte Konformfaktor λ, aber die Klasse der konformen Abbildungen bzw. Äquivalenzen bleibt gleich. Die Verkettung konformer Abbildungen ist wieder konform. Ist φ konforme Äquivalenz so auch φ^{-1}, wir berechnen explizit

$$(\varphi^{-1})^* g = (\varphi^{-1})^* \Big(\frac{1}{\lambda^2}\, \varphi^* h\Big) = \frac{1}{(\lambda \circ \varphi^{-1})^2}\, (\varphi \circ \varphi^{-1})^* h = \frac{1}{(\lambda \circ \varphi^{-1})^2}\, h.$$

Für $A = \lambda S$ mit $\lambda > 0$ und $S \in \mathbb{O}(2)$ ist $\varphi_A : \mathbb{R}^2/\Gamma \to \mathbb{R}^2/\Gamma'$ mit $\Gamma' = A\Gamma$ konforme Äquivalenz. Allerdings ist φ_A speziell, zum Beispiel ist der Konformfaktor $\lambda > 0$ konstant. Im allgemeinen ist das nicht so, zum Beispiel gilt

$$\varphi^* g_{\mathbb{R}^n}(x) = \frac{1}{|x|^4}\, g_{\mathbb{R}^n} \quad \text{für } \varphi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Wir wollen untersuchen, welche der flachen Tori zueinander konform äquivalent sind. Das folgende Lemma besagt, dass eine konforme Äquivalenz solcher Tori speziell ist.

Lemma 8.3 *Sei $\varphi : \mathbb{R}^2/\Gamma \to \mathbb{R}^2/\Gamma'$ konforme Äquivalenz. Dann gibt es $S \in \mathbb{O}(2)$, $\lambda > 0$ und $b \in \mathbb{R}^2$, so dass gilt:*

$$\Gamma' = A\Gamma \text{ mit } A = \lambda S \quad \text{und} \quad \varphi([x]_\Gamma) = [Ax + b]_{\Gamma'} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Beweis: Wir benötigen den folgenden Liftungssatz aus der Überlagerungstheorie.

Satz 8.6 (Liftung) *Sei $\pi : M \to Y$ eine Überlagerung und $f \in C^0(X,Y)$ mit $f(x_0) = y_0$. Ist X einfach zusammenhängend, so gibt es zu jedem $p_0 \in M$ mit $\pi(p_0) = y_0$ genau ein $F \in C^0(X,M)$ mit $\pi \circ F = f$ und $F(x_0) = p_0$.*

Wir wenden wir den Satz an auf $\pi_{\Gamma'} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma'$ und $f = \varphi \circ \pi_\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma'$. Wähle $b \in \mathbb{R}^2$ mit $[b]_{\Gamma'} = \varphi([0]_\Gamma)$. Es gibt dann genau ein $\phi \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit

$$\pi_{\Gamma'} \circ \phi = \varphi \circ \pi_\Gamma \quad \text{und} \quad \phi(0) = b.$$

Hier das Ganze in einem (nicht besonders schönen) Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2, 0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_\Gamma"'] \arrow[dr, "\varphi \circ \pi_\Gamma"] & \mathbb{R}^2, b \arrow[d, "\pi_{\Gamma'}"] \\
\mathbb{R}^2/\Gamma, [0]_\Gamma \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}^2/\Gamma', [b]_{\Gamma'}
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen nun ϕ differenzierbar. Zu $x \in \mathbb{R}^2$ wählen wir Umgebung V von $\phi(x)$ mit $\pi_{\Gamma'} : V \to \pi_{\Gamma'}(V)$ diffeomorph. Da ϕ stetig, gibt es Umgebung U von x mit $\phi(U) \subset V$. Es folgt

$$\phi|_U = (\pi_{\Gamma'}|_V)^{-1} \circ \varphi \circ \pi_\Gamma,$$

also ist ϕ glatt. Sei nun $\lambda : \mathbb{R}^2/\Gamma \to (0, \infty)$ der Konformfaktor von φ. Dann gilt

$$\phi^* g_{\mathbb{R}^2} = \phi^* \pi_{\Gamma'}^* g_{\Gamma'} = \pi_\Gamma^* \varphi^* g_{\Gamma'} = (\lambda \circ \pi_\Gamma)^2 g_{\mathbb{R}^2}.$$

Ist $\det D\phi > 0$, so ist $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Aber $|\phi'(z)| = \lambda(\pi_\Gamma(z))$ ist beschränkt, also ist $\phi'(z)$ konstant nach Liouville und es folgt $\phi(z) = az + b$. Im Fall $\det D\phi < 0$ argumentieren wir analog für $\phi(\overline{z})$, damit ist der zweite Teil der Behauptung gezeigt. Für $\gamma \in \Gamma$ folgt weiter

$$[b]_{\Gamma'} = \varphi([0]_\Gamma) = \varphi([\gamma]_\Gamma) = [A\gamma + b]_{\Gamma'},$$

also $A\gamma + b \in \Gamma' + b$ bzw. $A\Gamma \subset \Gamma'$. Aber $\varphi^{-1}([y]_{\Gamma'}) = [A^{-1}(y - b)]_\Gamma$. Es gilt dann analog $A^{-1}\Gamma' \subset \Gamma$, und somit $A\Gamma = \Gamma'$. $\square$

Behauptung: jedes Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$ ist unter $\mathbb{R}^+\mathbb{O}(2)$ äquivalent zu einem Gitter

$$\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}v \quad \text{mit } v \in M = \left\{v \in \mathbb{R}^2 : |v| \geq 1,\, 0 \leq v^1 \leq \frac{1}{2},\, v^2 > 0\right\}.$$

Das sehen wir wie folgt: wähle einen kürzesten Vektor e in $\Gamma \backslash \{0\}$, und dann einen kürzesten Vektor v in $\Gamma \backslash \mathbb{Z}e$. Beachte dabei, dass in jeder Kreisscheibe $B_R(0)$ nur endlich viele Gitterpunkte liegen. Denn ist A die lineare Abbildung mit $Av_i = e_i$, so gilt

$$\left(m_1^2 + m_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = |m_1 e_1 + m_2 e_2| = |A(m_1 v_1 + m_2 v_2)| \leq C\, |m_1 v_1 + m_2 v_2|.$$

e, v sind linear unabhängig, denn sonst ist $v = \alpha e$ mit $k < \alpha < k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und

$$0 \neq (\alpha - k)e = v - ke \in \Gamma \text{ mit } |(\alpha - k)e| < |e|, \text{ Widerspruch.}$$

Wir können annehmen dass $\langle v, e\rangle \geq 0$, sonst ersetze v durch $-v$. Nach Drehung und Streckung des Gitters gilt nun $e = e_1$. Durch evtl. Spiegelung des Gitters an der x-Achse wird $v^2 > 0$, dabei bleibt $v^1 \geq 0$. Wegen $v - e_1 \in \Gamma \backslash \mathbb{Z}e_1$ folgt nun

$$|v|^2 \leq |v - e_1|^2 = |v|^2 - 2v^1 + 1, \quad \text{also } v^1 \leq \frac{1}{2} \text{ und damit } v \in M.$$

Wir zeigen nun, dass e, v das Gitter Γ erzeugen. Sei dazu $w = \lambda e + \mu v \in \Gamma$ gegeben, ohne Einschränkung $-\frac{1}{2} \leq \lambda, \mu \leq \frac{1}{2}$. Wir zeigen $\lambda = \mu = 0$. Es gilt

$$|w| \leq |\lambda| + |\mu|\, |v| \leq (|\lambda| + |\mu|)|v| \leq |v|.$$

Angenommen es ist $w \neq 0$. Dann folgt $w \notin \mathbb{Z}e_1$ und somit $|w| \geq |v|$, wir hätten also Gleichheit. Dann sind λe_1 und μv linear abhängig, das geht nur für $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$. Aber dann ist $(|\lambda| + |\mu|)|v| \leq \frac{1}{2}|v| < |v|$, Widerspruch.

Satz 8.7 (Klassifikation flacher Tori) *Jeder Torus* $\mathbb{R}^2/\Gamma$ *ist konform äquivalent zu genau einem Torus* $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}v)$ *mit* $v \in M$.

BEWEIS: Es ist nur noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien $\Gamma_i = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}v_i$, $i = 1,2$, mit $v_i \in M$. Es gelte $\Gamma_2 = \lambda S \Gamma_1$ für $\lambda > 0$ und $S \in \mathbb{O}(2)$. Dann folgt

$$1 = \min_{y \in \Gamma_2 \backslash \{0\}} |y| = \min_{x \in \Gamma_1 \backslash \{0\}} |\lambda S x| = \lambda \min_{x \in \Gamma_1 \backslash \{0\}} |x| = \lambda.$$

S induziert eine Isometrie zwischen den $\mathbb{R}^2/\Gamma_i$, deren Flächeninhalt ist $\langle v_i, e_2 \rangle$. Also folgt $\langle v_1, e_2 \rangle = \langle v_2, e_2 \rangle$. Wir zeigen nun $|v_1| = |v_2|$; daraus folgt dann $v_1 = v_2$ bzw. $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Fall 1: $Se_1 = \pm e_1$. Dann gilt $S\mathbb{Z}e_1 = \mathbb{Z}e_1$, und es folgt

$$|v_2| = \min_{y \in \Gamma_2 \backslash \mathbb{Z}e_1} |y| = \min_{x \in \Gamma_1 \backslash \mathbb{Z}e_1} |Sx| = |v_1|.$$

Fall 2: $Se_1 \neq \pm e_1$. Dann gilt $Se_1 \in \Gamma \backslash \mathbb{Z}e_1$, also

$$1 \leq |v_2| = \min_{y \in \Gamma_2 \backslash \mathbb{Z}e_1} |y| \leq |Se_1| = 1.$$

Es gilt auch $S^{-1}e_1 \neq \pm e_1$, also folgt analog $|v_1| = 1$. □

Der Satz hat eine wesentliche Verallgemeinerung, nämlich den *Uniformisierungssatz im Fall von Geschlecht Eins:* jeder Riemannsche Torus (T, g), also T diffeomorph zu $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ist konform äquivalent zu genau einem flachen Torus $\mathbb{R}^2/\Gamma$ mit $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}v$, $v \in M$. Die Eindeutigkeit haben wir schon bewiesen. Für die Existenz bestimmt man eine konforme Metrik $g_0 = e^{2u}g$ mit Krümmung $K_{g_0} = 0$. Die Formel für die Krümmung (vgl. das Theorema Egregium) lautet

$$-\Delta_g u - K_g = K_{g_0} e^{2u}.$$

Es ist also die Laplacegleichung $-\Delta_g u = K_g$ zu lösen. Nach der Fredholmschen Alternative ist das genau dann möglich, wenn die rechte Seite in $L^2(g)$ senkrecht zum Kern des Operators Δ_g ist. Der Kern besteht nur aus den Konstanten, denn mit partieller Integration für $\Delta_g = \mathrm{div}_g \mathrm{grad}_g$ folgt

$$0 = -\int_T f \Delta_g f \, d\mu_g = \int_T \|\mathrm{gradf}\|_g^2 \, d\mu_g.$$

Die Fredholmsche Alternative folgt mit Gauß-Bonnet, es gilt

$$\int_T K_g \, d\mu_g = 2\pi\chi(T) = 0.$$

Der Torus (T, g_0) ist isometrisch zu einem der flachen Tori $\mathbb{R}^2/\Gamma$ (Satz von Minding).

9 Kovariante Ableitungen

In diesem Kapitel führen wir den Begriff der kovarianten Ableitung in einem Vektorbündel ein. Für eine vektorwertige C^1-Funktion $\xi : M \to \mathbb{R}^k$ kennen wir die übliche Ableitung

$$D\xi \in C^0(T^*M \otimes \mathbb{R}^k),\ D\xi = \sum_{i=1}^k d\xi^i \otimes e_i.$$

Der Operator $D : C^1(M,\mathbb{R}^k) \to C^0(T^*M \otimes \mathbb{R}^k)$ ist linear in ξ, und es gilt

$$D(f\xi) = \sum_{i=1}^k d(f\xi^i) \otimes e_i = df \otimes \xi + f\, D\xi \quad \text{für } f \in C^1(M).$$

Sei nun $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang k. Für einen C^1-Schnitt $\xi : M \to E$, also $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$, könnten wir auch die übliche Ableitung $D\xi$ betrachten. Diese bildet aber nach TE ab, mehrfache Ableitungen würden auf komplzierte Bündel führen. Außerdem enthält $D\xi$ überflüssige Information, denn es gilt ja $D\pi(\xi(p))D\xi(p) = D(\pi \circ \xi)(p) = \mathrm{Id}_{T_pM}$.

Definition 9.1 (Kovariante Ableitung) *Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang k. Eine kovariante Ableitung oder Zusammenhang auf E ist eine lineare Abbildung $\nabla : C^1(E) \to C^0(T^*M \otimes E)$, die folgende Produtregel erfüllt:*

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\, \nabla\xi. \tag{9.12}$$

Wir zeigen unten, dass es kovariante Ableitungen auf E gibt. Erstmal betrachten wir die Sache aber in einer lokalen Trivialisierung $\phi : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^k$. Wir haben dann die Basisfelder

$$v_i \in C^1(E|_V),\ v_i(p) = \phi^{-1}(p, e_i) \quad \text{für } i = 1, \ldots, k.$$

Bezüglich der Basis $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ wird ∇ durch eine 1-Form A auf V mit Werten in $\mathbb{R}^{k\times k}$ dargestellt. Und zwar definieren wir

$$\nabla_X v_j = \sum_{i=1}^k A^i_j(X)\, v_i \quad \text{für } X \in C^0(T^*M|_V) \text{ und } j = 1, \ldots, k. \tag{9.13}$$

Für einen beliebigen C^1-Schnitt $\xi = \sum_{j=1}^k \xi^j v_j$ folgt mit der Produktregel

$$\nabla_X \xi = \sum_{j=1}^k d\xi^j(X) v_j + \sum_{i,j=1}^k \xi^j A^i_j(X) v_i = \sum_{i=1}^k \big(d\xi^i(X) + \sum_{j=1}^k A^i_j(X)\xi^j\big)\, v_i.$$

Sei $\xi_{\mathcal{A}}$ der Koordinatenvektor von ξ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$. Dann lautet die Formel

$$(\nabla\xi)_{\mathcal{A}} = d\xi_{\mathcal{A}} + A\,\xi_{\mathcal{A}}, \quad \text{oder kurz } \nabla = d + A. \tag{9.14}$$

Sei jetzt $\psi : \pi^{-1}(W) \to W \times \mathbb{R}^k$ eine andere Trivialisierung, mit Basis $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_k\}$ auf W, also $w_j \in C^1(E|_W)$, $w_j(p) = \psi^{-1}(p, e_j)$. Setze

$$S = \mathrm{Id}_{\mathcal{AB}} : V \cap W \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}),\ w_j = \sum_{i=1}^k S^i_j\, v_i.$$

S ist die Matrix der Übergangsfunktion zwischen ϕ und ψ, es gilt

$$\phi \circ \psi^{-1}(p, e_j) = \phi(p, w_j) = \sum_{i=1}^k S^i_j\, \phi(p, v_i) = \sum_{i=1}^k S^i_j\, e_i.$$

Für die Koordinatenvektoren $\xi_{\mathcal{A}}$ und $\xi_{\mathcal{B}}$ gilt

$$\xi = \sum_{j=1}^{k} \xi_{\mathcal{B}}^j \, w_j = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} S_j^i \, \xi_{\mathcal{B}}^j \, v_i, \qquad \text{also } \xi_{\mathcal{A}} = S\xi_{\mathcal{B}}.$$

Für die Koordinatendarstellung $(\nabla\xi)_{\mathcal{A}}$ ergibt sich die Relation

$$\begin{aligned} (\nabla\xi)_{\mathcal{A}} &= d\xi_{\mathcal{A}} + A\xi_{\mathcal{A}} \\ &= d(S\xi_{\mathcal{B}}) + AS\xi_{\mathcal{B}} \\ &= S\,d\xi_{\mathcal{B}} + (dS)\,\xi_{\mathcal{B}} + AS\xi_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Andererseits ist $(\nabla\xi)_{\mathcal{A}} = S\,(\nabla\xi)_{\mathcal{B}} = S\big(d\xi_{\mathcal{B}} + B\,\xi_{\mathcal{B}}\big)$. Durch Vergleich ergibt sich, wenn wir noch $T = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = S^{-1}$ setzen,

$$B = S^{-1}AS + S^{-1}dS \qquad \text{bzw.} \qquad B = TAT^{-1} - (dT)T^{-1}. \tag{9.15}$$

Beachte dabei $0 = d(ST) = (dS)T + S(dT) = S(S^{-1}dS + (dT)T^{-1})T$.

Sei $G \subset \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ eine Untergruppe. Man sagt, die Strukturgruppe des Bündels E ist nach G reduzierbar, wenn es einen Bündelatlas gibt mit Übergangsfunktionen in G.

Lemma 9.1 *Jedes Vektorbündel E vom Rang k über M besitzt eine Riemannsche Metrik. Insbesondere ist die Strukturgruppe immer nach $\mathbb{O}(k)$ reduzierbar.*

Beweis: Sei $\phi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times \mathbb{R}^k$. Definiere auf U_λ die Riemannsche Metrik

$$g_\lambda(p)(v,w) = \langle \phi_\lambda(p,v), \phi_\lambda(p,w) \rangle_{\mathbb{R}^k}.$$

Überdecke M mit Gebieten U_λ und verwende eine untergeordnete Teilung der Eins. Mittels Gram-Schmidt kann jede lokale Basis in eine Orthonormalbasis überführt werden, daraus folgt die zweite Aussage. □

Definition 9.2 (metrischer Zusammenhang) *Sei g Riemannsche Metrik auf dem Vektorbündel E. Eine kovariante Ableitung auf E heißt metrisch, wenn gilt:*

$$d[g(v,w)] = g(\nabla v, w) + g(v, \nabla w) \qquad \textit{für alle } v, w \in C^1(E).$$

Lemma 9.2 *Sei g Riemannsche Metrik auf E. Ein Zusammenhang ∇ auf E ist genau dann metrisch, wenn bezüglich jeder lokalen Orthonormalbasis $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_k\}$ gilt:*

$$A + A^{\mathrm{T}} = 0, \qquad \textit{also } A \in C^0(T^*U \otimes \mathfrak{so}(k)). \tag{9.16}$$

Beweis: Bezüglich der Orthonormalbasis $\mathcal{E}$ gilt

$$d\,[g(e_i, e_j)] = 0 \qquad \text{und} \qquad g(\nabla e_i, e_j) + g(e_i, \nabla e_j) = A_i^j + A_j^i.$$

Ist ∇ metrisch so folgt direkt $A + A^{\mathrm{T}} = 0$. Umgekehrt gilt, da A schiefsymmetrisch,

$$\begin{aligned} g(\nabla v, w) + g(v, \nabla w) &= \langle dv_{\mathcal{E}} + Av_{\mathcal{E}}, w_{\mathcal{E}} \rangle_{\mathbb{R}^k} + \langle v_{\mathcal{E}}, dw_{\mathcal{E}} + Aw_{\mathcal{E}} \rangle_{\mathbb{R}^k} \\ &= d\,\langle v_{\mathcal{E}}, w_{\mathcal{E}} \rangle_{\mathbb{R}^k} \\ &= d\,[g(v,w)]. \end{aligned}$$

□

Lemma 9.3 *Die Strukturgruppe eines Vektorbündels E vom Rang k über M ist genau dann nach $\mathbb{S}O(k)$ reduzierbar, wenn das Bündel orientierbar ist.*

Beweis: Es gebe einen Bündelatlas mit Übergangsfunktionen in $\mathbb{S}O(k)$. Für zugehörige lokale Trivialisierung definieren wir eine Orientierung durch die Basis $\phi^{-1}(e_j)$, $1 \leq j \leq k$. Das liefert eine wohldefinierte Orientierung. Ist umgekehrt eine Orientierung gegeben, so definiere diesbezüglich positiv orientierte Karten (ggf. durch Verkettung mit einer Spiegelung). □

Satz 9.1 (Raum der Zusammenhänge) *Auf jedem Vektorbündel $\pi : E \to M$ existiert eine kovariante Ableitung. Ist ∇_0 eine feste kovariante Ableitung, so ist die Menge aller kovarianten Ableitungen gegeben durch*

$$\nabla = \nabla_0 + \Omega \quad \text{mit } \Omega \in C^0\big(T^*M \otimes \mathrm{End}(E)\big).$$

Beweis: Wähle lokale Trivialisierungen $\phi_\lambda : \pi^{-1}(V_\lambda) \to V_\lambda \times \mathbb{R}^k$, $\lambda \in \Lambda$, so dass M durch die V_λ überdeckt wird. Seien $v_{\lambda,i}$ die Basisfelder von ϕ_λ, und betrachte auf $E|_{V_\lambda}$

$$\nabla_\lambda \xi = \sum_{i=1}^{k} d\xi_\lambda^i \otimes v_{\lambda,i}.$$

Wähle eine untergeordnete Teilung der Eins η_λ und setze

$$\nabla \xi = \sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda \nabla_\lambda \xi.$$

Dann ist $\nabla : C^1(E) \to C^0(T^*M \otimes E)$ wohldefiniert und linear. Da ∇_λ eine kovariante Ableitung auf $E|_{V_\lambda}$ ist, gilt für $f \in C^1(M)$

$$\nabla(f\xi) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda \nabla_\lambda (f\xi) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \eta_\lambda \big(df \otimes \xi + f\, \nabla_\lambda \xi\big) = df \otimes \xi + f\, \nabla \xi.$$

Damit ist die Existenz einer kovarianten Ableitung gezeigt. Seien nun ∇ und ∇_0 zwei kovariante Ableitungen. Bezüglich einer lokalen Basis $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ auf U haben ∇, ∇_0 Darstellungen $d + A$ bzw. $d + A_0$. Definiere auf Ω auf U durch

$$\Omega\, \xi = \sum_{i,j=1}^{k} (A - A_0)^i_j \xi^j v_i = \nabla \xi - \nabla_0 \xi.$$

Wegen der rechten Darstellung hängt Ω nicht von der Wahl der Trivialisierung ab, und ist damit die gesuchte 1-Form mit Werten in $\mathrm{End}(E)$. □

Bemerkung 9.1 Hat E eine Riemannsche Metrik, so gibt es einen metrischen Zusammenhang. Wir können dazu annehmen, dass die Basen $\mathcal{A}_\lambda$ der Trivialisierungen orthonormal sind. Nach Definition hat ∇_λ bezüglich $\mathcal{A}_\lambda$ die Zusammenhangsform Null. Bezüglich $\mathcal{A}_\mu$ gilt dann

$$(\nabla_\lambda \xi)_{\mathcal{A}_\mu} = d\xi_{\mathcal{A}_\mu} + S^{-1} dS\, \xi_{\mathcal{A}_\mu}, \quad \text{mit } S = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu}.$$

Beachte nun $0 = d(S^{\mathrm{T}} S) = dS^{\mathrm{T}} S + S^{\mathrm{T}} dS = (S^{-1} dS)^{\mathrm{T}} + S^{-1} dS$. Somit hat $\nabla \xi$ eine schiefsymmetrische Zusammenhangsform, und ist damit metrisch nach Lemma 9.2. Ist ∇_0 metrisch, so sind alle metrischen Zusammenhänge gleich $\nabla_0 + C^0(T^*M \otimes \mathfrak{so}(E))$. Das folgt wie oben.

Sei ∇ gegebener Zusammenhang auf E. Wir definieren jetzt die kovariante Ableitung eines Feldes $\xi \in C^1([a,b],E)$ längs $c \in C^1([a,b],M)$, also $\pi \circ \xi = c$. Man nennt c die Fußpunktkurve von ξ. Wir nehmen zuerst an dass $c(t) \in V$ für alle $t \in [a,b]$, wobei auf V eine Basis $\mathcal{A}$ existiert. Dann setzen wir

$$\left(\frac{\nabla\xi}{dt}\right)_{\mathcal{A}} = \frac{d\xi_{\mathcal{A}}}{dt} + A(c')\,\xi_{\mathcal{A}}. \tag{9.17}$$

Genauer sollten wir $A \circ c(c')$ schreiben, es ist aber üblich den Fußpunkt da wegzulassen. Wir zeigen jetzt, dass die Definition nicht von der Basis abhängt. Sei auch $c(t) \in W$ für alle $t \in [a,b]$, und auf W gebe es eine lokale Basis $\mathcal{B}$. Es gilt dann $\xi_{\mathcal{A}}(t) = S(c(t))\xi_{\mathcal{B}}(t)$ mit $S = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$. Also folgt für die Zusammenhangsformen A, B

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_{\mathcal{A}}}{dt} + A(c')\,\xi_{\mathcal{A}} &= \frac{d((S\circ c)\xi_{\mathcal{B}})}{dt} + A(c')(S\circ c)\xi_{\mathcal{B}} \\
&= (S\circ c)\Big(\frac{d\xi_{\mathcal{B}}}{dt} + (S\circ c)^{-1}dS(c')\,\xi_{\mathcal{B}} + (S\circ c)^{-1}A(c')(S\circ c)\,\xi_{\mathcal{B}}\Big) \\
&= (S\circ c)\Big(\frac{d\xi_{\mathcal{B}}}{dt} + B(c')\,\xi_{\mathcal{B}}\Big).
\end{aligned}$$

Somit ist $\dfrac{\nabla\xi}{dt}$ unabhängig von der Wahl der Basis definiert.

10 Appendix

Definition 10.1 (Teilung der Eins) *Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilung der Eins auf M ist eine Familie χ_i, $i \in I$, von glatten Funktionen mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *das System* $\operatorname{spt}\chi_i$, $i \in I$, *ist lokal endlich: jedes $p \in M$ hat eine offene Umgebung U, so dass* $\operatorname{spt}\chi_i \cap U \neq \emptyset$ *nur für endlich viele $i \in I$.*

(b) $\sum_{i\in I}\chi_i \equiv 1$.

Die Teilung der Eins heißt der Überdeckung V_λ, $\lambda \in \Lambda$, untergeordnet, wenn es zu jedem $i \in I$ ein $\lambda \in \Lambda$ gibt mit $\operatorname{spt}\chi_i \subset V_\lambda$.

Beachte: der Träger der Nullfunktion ist nach Definition die leere Menge.

Satz 10.1 (Teilung der Eins) *Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, und V_λ, $\lambda \in \Lambda$, eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es eine untergeordnete Teilung der Eins χ_i, $i \in I$, mit* $\operatorname{spt}\chi_i$ *kompakt für alle $i \in I$.*

Bemerkung. Ist $K \subset M$ kompakt, so ist die Menge der $i \in I$ mit $\operatorname{spt}\chi_i \cap K \neq \emptyset$ endlich wegen Eigenschaft (a) in Definition 10.1. Für M kompakt ist also I endlich. Allgemein ist I abzählbar, da M durch eine Folge kompakter Mengen ausgeschöpft ist, siehe Satz 1.1.

Zum Beweis des Satzes fixieren wir eine Funktion $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi = 1$ auf $[-1,1]^n$ und $\operatorname{spt}\chi \subset (-2,2)^n$.

Beweis: Sei $\emptyset = G_0 \subset\subset G_1 \subset \ldots$ die Ausschöpfung aus Satz 1.1. Für $p \in M$ sei $i_p = \max\{i \in \mathbb{N}_0 : p \notin \overline{G}_i\}$. Es folgt $p \in G_{i_p+2}\backslash\overline{G}_{i_p}$. Wähle $\lambda_p \in \Lambda$ mit $p \in V_{\lambda_p}$. Es gibt dann eine Karte (U_p, φ_p) mit folgenden Eigenschaften:

(a) $U_p \subset V_{\lambda_p} \cap G_{i_p+2} \backslash \overline{G}_{i_p}$,

(b) $\varphi_p(p) = 0$ und $\varphi_p(U_p) \supset [-2,2]^n$.

Definiere $\eta_p \in C^\infty(M)$ durch

$$\eta_p = \begin{cases} \chi \circ \varphi_p & \text{auf } U_p, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist $\operatorname{spt} \eta_p \subset\subset U_p \subset V_{\lambda_p}$, und es gilt

$$\operatorname{spt} \eta_p \cap G_k \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad G_{i_p+2} \backslash \overline{G}_{i_p} \cap G_k \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad k \geq i_p + 1.$$

Setze $W_p = \varphi_p^{-1}([-1,1]^n)$, also $\eta_p = 1$ auf W_p.

Wähle nun zu $j \in \mathbb{N}_0$ Punkte $p_{j,\nu} \in \overline{G}_{j+1} \backslash G_j$, $1 \leq \nu \leq N_j$, so dass $\overline{G}_{j+1} \backslash G_j$ durch die $W_{p_{j,\nu}}$ überdeckt wird. Wegen $p_{j,\nu} \notin G_j \supset \overline{G}_{j-1}$ ist $i_{p_{j,\nu}} \geq j-1$. Damit gilt

$$\operatorname{spt} \eta_{p_{j,\nu}} \cap G_k \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad j \leq i_{p_{j,\nu}} + 1 \leq k.$$

Also sind die Träger $\operatorname{spt} \eta_{p_{j,\nu}}$ mit $j \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq \nu \leq N_j$, lokal endlich. Definiere schließlich

$$\eta = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{1 \leq \nu \leq N_j} \eta_{p_{j,\nu}},$$

und erhalte die Teilung der Eins $\chi_{j,\nu} = \eta_{p_{j,\nu}}/\eta$. □

Satz 10.2 (Teilung der Eins mit gleicher Indexmenge) *Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, und V_λ, $\lambda \in \Lambda$, eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es eine untergeordnete Teilung der Eins φ_λ, $\lambda \in \Lambda$.*

Im Gegensatz zu Satz 10.1 kann hier nicht verlangt werden, dass $\operatorname{spt} \varphi_\lambda$ kompakt ist. Das sieht man schon am Fall $M = \mathbb{R}$ mit Überdeckung $U = \mathbb{R}$.

Beweis: Seien χ_i, $i \in I$, wie in Satz 10.1. Wähle für alle $i \in I$ ein $\lambda(i) \in \Lambda$ mit $\operatorname{spt} \chi_i \subset V_{\lambda(i)}$, und setze

$$I(\lambda) = \{i \in I : \lambda(i) = \lambda\} \quad \text{und} \quad \varphi_\lambda = \sum_{i \in I(\lambda)} \chi_i.$$

φ_λ ist in $C^\infty(M)$ wohldefiniert, da das System $\operatorname{spt} \chi_i$ lokal endlich ist. Ist $\operatorname{spt} \varphi_\lambda \cap U \neq \emptyset$, so folgt $\operatorname{spt} \chi_i \cap U \neq \emptyset$ für ein $i \in I(\lambda)$. Da $I(\lambda) \cap I(\mu) = \emptyset$ für $\lambda \neq \mu$, ist das System $\operatorname{spt} \varphi_\lambda$ lokal endlich. Weiter gilt für $p \in M$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(p) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I(\lambda)} \chi_i(p) = \sum_{i \in I} \chi_i(p) = 1.$$

Schließlich gibt es zu $p \in \operatorname{spt} \varphi_\lambda$ ein $i \in I(\lambda)$ mit $p \in \operatorname{spt} \chi_i$, somit gilt $p \in V_{\lambda(i)} = V_\lambda$, das heißt die Teilung der Eins ist der Überdeckung V_λ, $\lambda \in \Lambda$, untergeordnet. □

Diese Variante wird in Satz 6.3 und in Satz 8.3 gebraucht.