Aufgabe 1+2 *(Produktmannigfaltigkeiten)*
Seien M, N topologische Räume. Eine Menge $\Omega \subset M \times N$ heiße offen, wenn es zu jedem $p = (x, y) \in \Omega$ offene Umgebungen U, V von x, y gibt mit $U \times V \subset \Omega$.

(a) Zeigen Sie, dass hierdurch eine Topologie auf $M \times N$ definiert ist.

(b) Sind M, N Hausdorffsch, so auch $M \times N$.

(c) Haben M, N abzählbare Basen, so auch $M \times N$.

(d) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ C^0-Atlanten für M, N der Dimensionen m, n, so bilden die (φ, ψ) mit $\varphi, \psi \in \mathcal{A}, \mathcal{B}$ einen C^0-Atlas von $M \times N$ der Dimension $m + n$.

(e) Die Projektionen von $M \times N$ auf die Faktoren M, N sind stetig.

(f) Sind M,N C^∞-Mannigfaltigkeiten, so auch $M \times N$.

Aufgabe 3 *(Topologie der induzierten Metrik)*
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Zeigen Sie dass die durch die induzierte Metrik gegebene Topologie genau die Relativtopologie ist.

Aufgabe 4 *(Stetigkeitsbegriffe)*
Es sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis.

(a) Zeigen Sie, dass es für alle $x \in X$ eine absteigende Folge offener Mengen $(U_i)_{i=1}^N$ (d.h. $U_{i+1} \subset U_i$) mit $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ gibt, die $\bigcap_{i=1}^N U_i = \{x\}$ erfüllt und von der sich jede Menge U_i als endlicher Schnitt von Basismengen schreiben lässt.

(b) Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f : X \to Y$ folgenstetig (d.h. $x_n \to x$ impliziert $f(x_n) \to f(x)$). Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Insbesondere genügt es also auf Mannigfaltigkeiten die Folgenstetigkeit zu überprüfen.

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 31.10. um 12:00 in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten von Jan Metsch