Aufgabe $1+2$ *(Untermannigfaltigkeiten)*
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞. Dann ist M topologischer Raum mit der Relativtopologie.

(a) Zeigen Sie: M ist eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(b) Die differenzierbare Struktur auf M ist eindeutig bestimmt durch die Forderung, dass die Inklusionsabbildung $i_M : M \to \mathbb{R}^n$, $i_M(x) = x$ eine stetig differenzierbare Immersion (d.h.: Das Differential der Kartendarstellung $i_M \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbb{R}^n$ ist in jedem Punkt $x \in U$ injektiv) ist.

Es genügt übrigens nicht zu fordern, dass i_M glatt ist. Das kann man zum Beispiel mithilfe einer ähnlichen Konstruktion wie in Beispiel 2.3 sehen.

Aufgabe 3 *(Zylinder $\cong \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$)*
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ diffeomorph sind.

Aufgabe 4 *(Sphäre als komplexe Mannifaltigkeit)*
Betrachten Sie auf $\mathbb{S}^2$ die stereographischen Projektionen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^2$ aus Beispiel 1.9. Identifizieren Sie $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, und ersetzen Sie die Projektion φ_2 vom Südpol durch $\overline{\varphi}_2$ (komplexe Konjugation). Zeigen Sie: Der Kartenwechsel $\overline{\varphi}_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ist komplex differenzierbar.

Man kann also von holomorphen Funktionen auf $\mathbb{S}^2$ reden.

Abgabe der Lösungen bis Dienstag 7.11. um 12:00 im Postkasten von Jan Metsch