**Aufgabe** 1 *(Der projektive Raum)*
Seien $M := \mathbb{S}^n$ und $\Gamma := \{\pm \mathrm{id}\}$ wie in Beispiel 2.6. Zeigen Sie ohne Satz 2.2:

(a) $M/\Gamma$ ist Hausdorffsch.

(b) $\pi : M \to M/\Gamma$ ist eine Überlagerung.

In Satz 2.2 wurde auf $M/\Gamma$ ein Atlas konstruiert.

(c) Gehen Sie die Konstruktion im Beweis von Satz 2.2 durch und geben Sie einen Atlas auf $\mathbb{S}^2/\Gamma$ an.

**Aufgabe** 2 *(Der Torus)*
Seien $M := \mathbb{R}^n$ und $\Gamma := \mathbb{Z}^n$ wie in Beispiel 2.7. Zeigen Sie ohne Satz 2.2:

(a) $M/\Gamma$ ist Hausdorffsch.

(b) $\pi : M \to M/\Gamma$ ist eine Überlagerung.

**Aufgabe** $3+4$ *(Der projektive Raum II)*
Alternativ lässt sich der projektive Raum wie folgt definieren:

Auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : \; x = \lambda y$$

und setzen $\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1}/\sim$ und statten ihn mit der Quotiententoplogie aus. Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit und diffeomorph zu $\mathbb{S}^n/\Gamma$ aus Aufgabe 1 ist. Gehen Sie hierfür so vor:

(a) Zeigen Sie: Die Quotiententopologie ist Hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis.

(b) Geben Sie einen Atlas an. Hierfür ist es hilfreich die Mengen

$$U_i := \{(x_0, ..., x_n) \mid x_i \neq 0\} \quad \text{für } 0 \leq i \leq n$$

sowie die Abbildungen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{RP}^n, \; (x_0, ..., x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}\right)$ zu betrachten.

Hiermit ist $\mathbb{RP}^n$ bereits eine glatte Mannigfaltigkeit. Für $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichne ab jetzt $[x]$ die Äquivalenzklasse in $\mathbb{RP}^n$ und $[\![y]\!]$ die für $y \in \mathbb{S}^n$ in $\mathbb{S}^n/\Gamma$.

(c) Zeigen Sie: $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{S}^n/\Gamma$, $f([x]) := [\![\frac{x}{\|x\|_2}]\!]$ ist ein Diffeomorphismus.

*Abgabe der Lösungen bis Montag 14.11. um 12:00 im Postkasten von Jan Metsch*