Aufgabe 1 (*Stetigkeit bzgl. Quotiententopologie*)
Seien X, Y topologische Räume und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für $x \in X$ sei $[x] := \{x' \in X : x' \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x, $X/\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) := [x]$, die Projektion. Wir versehen $X/\sim$ mit der Quotiententoplogie.

Sei $F : X \to Y$ mit $F(x) = F(x')$ falls $x \sim x'$. Zeigen Sie:

(a) $f : X/\sim \longrightarrow Y$, $f([x]) := F(x)$, ist wohldefiniert.

(b) f ist genau dann stetig, wenn F stetig ist.

Aufgabe 2 (*kritische Punkte – reguläre Werte*)
Seien $f : M \to N$ differenzierbar. Wir definieren:

(a) $x \in M$ ist kritischer Punkt von f, wenn $Df(x)$ nicht surjektiv ist.

(b) $y \in N$ ist regulärer Wert von f, wenn $f^{-1}\{y\}$ keine kritischen Punkte enthält.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr (Beweis oder Gegenbeispiel):

(1) Ist $Df(x)$ surjektiv, so ist $f(x)$ regulärer Wert.

(2) Ist y regulärer Wert, so ist $f^{-1}(\{y\})$ eine Untermannigfaltigkeit.

(3) In (2) gilt auch die umgekehrte Implikation.

(4) Sei $g : N \to P$ ebenfalls differenzierbar, und x sei kritischer Punkt von $g \circ f$. Dann folgt: x ist kritischer Punkt von f oder $f(x)$ ist kritischer Punkt von g.

Aufgabe 3 (*Hopffaserung*)
Sei $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Betrachten Sie $H : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ mit

$$H(z,w) = \begin{cases} \phi^{-1}\left(\frac{z}{w}\right) & \text{für } w \neq 0, \\ (0,0,1) & \text{für } w = 0. \end{cases}$$

Dabei ist $\phi : \mathbb{S}^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ die stereographische Projektion vom Nordpol. Zeigen Sie, dass H eine C^∞-Abbildung ist mit rang $DH(z, w) = 2$ für alle $(z, w) \in \mathbb{S}^3$. Bestimmen Sie $H^{-1}(\{\omega\})$ für gegebenes $\omega = H(z, w)$.

Abgabe der Lösungen bis Montag 21.11. um 12:00 im Postkasten 3.19/3.20