Aufgabe 1 (*Koordinatenfeld auf* $\mathbb{S}^2$)
Sei $\varphi : \mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Nordpol. Berechnen Sie bezüglich dieser Karte das Feld $\frac{\partial}{\partial x^1}$ und zeigen sie, dass es zu einem C^∞-Feld auf ganz $\mathbb{S}^2$ fortsetzbar ist.

Aufgabe 2 (*Vektorfelder auf* $\mathbb{RP}^n$)
Konstruieren Sie auf $\mathbb{RP}^n$ ein Vektorfeld: Ohne Nullstelle im Fall n ungerade und mit genau einer Nullstelle im Fall n gerade.

Aufgabe 3 (*Vektorfelder auf* $\mathbb{R}^2$)
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^n$ die Vektorfelder $X(x) = a \in \mathbb{R}^n$, $Y(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schiefsymmetrisch, und $Z(x) = x$. Für $F = X, Y, Z$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $\phi(t, x_0)$ durch

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\phi(t, x_0) = F(\phi(t, x_0)), \\ \phi(0, x_0) = x_0. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Abbildungen $\phi(t, x_0)$ für alle 3 Vektorfelder. Zeigen Sie $\langle \phi(t, x_0), \phi(t, y_0)\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$, wenn $F = X, Y$ gilt und, dass das im Fall $F = Z$ nicht stimmt.

Aufgabe 4 (*Fluss auf dem Torus*)
Sei $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 =: M$ der Torus, vgl. Aufgabe 2, Serie 4. Zeigen Sie:

(a) Zu $a \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $X \in C^\infty(TM)$ mit $X(\pi(x,y)) = D\pi(x,y)(1,a)$.

(b) Berechnen Sie die Integralkurven von X.

(c) Es ist $a \in \mathbb{Q}$ genau wenn die Integralkurven von X periodisch sind.

Abgabe der Lösungen bis Montag 28.11. um 12:00 im Postkasten 3.19/3.20