Aufgabe 1 (*Partielle Ableitungen in M*)
Bestätigen Sie die Rechnungen mit partiellen Ableitungen in Satz 4.3 (Definition der Lieklammer).

Aufgabe 2 (C^∞*-Vektorfelder*)
Sei $X \in C^0(TM)$. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $X \in C^\infty(TM)$

(b) $Xf \in C^\infty(M)$ für alle $f \in C^\infty(M)$.

Aufgabe 3 (*Kommutierende Vektorfelder*)
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^n$ die Vektorfelder $X(x) = Ax$ und $Y(x) = Bx$ mit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entscheiden Sie ob die zugehörigen Flüsse kommutieren. Zeigen Sie: Wenn die Flüsse kommutieren gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Finden Sie schließlich Matrizen A und B für die diese Gleichung nicht stimmt.

Aufgabe 4 (*Flussvolumen*)
Sei $X \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $U \subset\subset V$ (d.h. $\bar{U} \subset V$ ist kompakt) offen. Begründen Sie, dass das Volumen $\mathcal{L}^n(\phi_t(U))$ für $|t|$ klein definiert ist, wobei ϕ_t der Fluss von X ist, und berechnen Sie die Ableitung des Volumens an der Stelle $t = 0$.

Abgabe der Lösungen bis Montag 05.12. um 12:00 in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkästen im Keller