Aufgabe 1 (*Maxwell-Gleichungen*)
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ die 1-Form $A = A_0\, dt + \sum_{i=1}^3 A_i\, dx^i$. Definieren Sie $E, B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die Gleichung

$$dA = -\sum_{i=1}^{3} E^i\, dt \wedge dx^i + \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i-1} B^i\, dx^{\hat{i}}.$$

Folgern Sie aus $d^2 A = 0$ folgende zwei (von insgesamt vier) Maxwellgleichungen:

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot} E = 0.$$

Aufgabe 2 (*Kohomologie von* $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$)
Zeigen Sie dass folgende Abbildung wohldefiniert und isomorph ist:

$$I : H^1_{DR}(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \to \mathbb{R},\ I([\omega]) = \int_c \omega \quad \text{wobei } c(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 3 (*Lemma von Cartan*)
Seien $\omega_1, \ldots, \omega_k \in C^\infty(\Lambda^1 TM)$, so dass $\omega_1(p), \ldots, \omega_k(p)$ linear unabhängig sind für alle $p \in M$. Zeigen Sie: Sind $\phi_1, \ldots, \phi_k \in C^\infty(\Lambda^1 TM)$ mit

$$\sum_{i=1}^{k} \phi_i \wedge \omega_i = 0,$$

so gibt es Funktionen $a_{ij} \in C^\infty(M)$, $1 \leq i, j \leq k$, mit $a_{ij} = a_{ji}$ und

$$\phi_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}\omega_i \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, k.$$

Aufgabe 4 (*Kohomologie mit kompaktem Träger*)
Der Träger spt f einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist der Abschluss der Menge $\{f \neq 0\}$. Wir bezeichnen die C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}$ mit $C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$. Betrachten Sie folgende Modifikation der de-Rham-Kohomologie:

$$\begin{aligned} Z^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}) &= \{\gamma = g(x)\, dx : g \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})\}, \\ B^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}) &= \{f'(x)\, dx : f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})\}, \\ H^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}) &= Z^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})/B^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass folgende Abbildung ein wohldefinierter Isomorphismus ist:

$$L : H^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ L([\gamma]) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx \quad \text{für } \gamma = g(x)\, dx.$$

Abgabe der Lösungen bis Montag 09.01.2023 um 12:00 in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten im Keller