Aufgabe 1 (*Integral und Teilung der Eins*) **(4P.)**
Sei $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Teilung der Eins auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Folgern Sie

$$\int_M \omega = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_M \eta_i \omega$$

für jede integrierbare n-Form ω.

Aufgabe 2 (*Riemannsche Flächen*) **(4P.)**
Sei Σ eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, das heißt es gibt einen zweidimensionalen, reellen Atlas mit Karten

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C},\ \varphi(p) = x + iy = z,$$

so dass alle Kartenwechsel holomorph sind. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Definiere bezüglich obiger Karten
$$J\Big(a\,\frac{\partial}{\partial x} + b\,\frac{\partial}{\partial y}\Big) = -b\,\frac{\partial}{\partial x} + a\,\frac{\partial}{\partial y}.$$
Dann ist $J \in C^\infty(\mathrm{End}(T\Sigma))$ wohldefiniert und es gilt $J^2 = -\mathrm{Id}$.

(b) Sei $\Omega^1_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ der Raum der $\mathbb{C}$-wertigen 1-Formen. Dann gilt die Zerlegung $\Omega^1_{\mathbb{C}}(\Sigma) = \Omega^{1,0}_C(\Sigma) \oplus \Omega^{0,1}_C(\Sigma)$, wobei $\Omega^{1,0}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ (bzw. $\Omega^{0,1}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$) der Raum der 1-Formen ω ist mit $\omega(JX) = i\omega(X)$ (bzw. $\omega(JX) = -i\omega(X)$).

(c) Eine Form $\omega \in \Omega^{1,0}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ hat bzgl. einer Karte $\varphi : U \to \mathbb{C}$ eine Darstellung der Form $\omega = f\,dz$, wobei $f : U \to \mathbb{C}$ und $dz = dx + idy$, und es gilt:
$$\omega \text{ geschlossen auf } U \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ holomorph.}$$

Bemerkung. Eine $\mathbb{C}$-wertige 1-Form ist vom Typ $\omega = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \Omega^1(\Sigma)$. Ihre äußere Ableitung ist gegeben durch $d\omega = d\alpha + id\beta$.

Aufgabe 3 (*Satz vom Igel*) **(4P.)**
Es bezeichne $\mathbb{S}^2(r)$ die Sphäre mit Radius r. Zeigen Sie:

(i) Für $\omega = x \llcorner (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$ gilt $\int_{\mathbb{S}^2(r)} \omega = 4\pi r^3$.

(ii) Für jedes tangentiale Vektorfeld $X \in C^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ ist
$$f_\epsilon : \mathbb{S}^2 \to \mathrm{Bild}(f_\epsilon),\ \ f_\epsilon(x) := x + \epsilon X(x)$$
eine C^1-Abbildung und $\int_{\mathbb{S}^2} f_\varepsilon^* \omega$ ist ein Polynom in $\varepsilon > 0$.

Nehmen Sie nun an, dass es ein tangentiales Vektorfeld $X \in C^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ gäbe, dass $|X(x)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{S}^2$ erfüllt. Folgern Sie:

(iii) Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein und $r := \sqrt{1+\epsilon^2}$ ist f_ϵ aus (ii) ein Diffeomorphismus auf $\mathbb{S}^2(r)$.

(iv) Jedes tangentiale Vektorfeld auf $\mathbb{S}^2$ hat eine Nullstelle.

Abgabe der Lösungen bis Montag 16.01.2023 um 12:00 in der Ernst-Zermelo-Str. 1, Postkasten im Keller