Aufgabe 1 (*Satz von Stokes – klassisch*)
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, Oberflächenelement $d\mu$ und positiv orientierter Einheitsnormale ν. Beweisen Sie für ein Vektorfeld $X \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die Formel

$$\int_M \langle \operatorname{rot} X, \nu \rangle \, d\mu = \int_{\partial M} \langle X, \tau \rangle \, ds,$$

wobei ds das Längenelement und τ der positiv orientierte Einheitstangentenvektor von ∂M sind.

Aufgabe 2 (*Kohomologie kompakter Mannigfaltigkeiten*)
Sei M kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit mit $\dim M = n$. Zeigen Sie $H^n(M) \neq \{0\}$ und folgern Sie: M ist nicht zusammenziehbar, das heißt es gibt keine Abbildung $F \in C^\infty(M \times [0,1], M)$ mit $F(\cdot, 0) = \mathrm{id}_M$ und $F(\cdot, 1) = \mathrm{const}$.

Aufgabe 3 (*Raumwinkelform*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Zeigen Sie:

(i)
$$\int_{\partial\Omega} \omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{falls } 0 \in \Omega \\ 0, & \text{falls } 0 \notin \bar{\Omega}. \end{cases} \qquad \text{wobei } \omega = \frac{x}{|x|^3} \llcorner (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3).$$

(ii) Bildet $p : \partial\Omega \to \mathbb{S}^2$, $x \mapsto \frac{x}{|x|}$, das Gebiet $D \subset \partial\Omega$ diffeomorph auf sein Bild $p(D) \subset \mathbb{S}^2$ ab, so gilt
$$\mu(p(D)) = \int_D \omega.$$
Der Flächeninhalt $\mu(p(D))$ ist hierbei wie in Analysis III zu verstehen.

Aufgabe 4 (*Fixpunktsatz von Brouwer*)
Eine Retraktion eines topologischen Raums M auf eine Teilmenge A ist eine Abbildung $r \in C^0(M, A)$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$. Wir betrachten hier $A = \partial M$ für eine kompakte Mannigfaltigkeit M mit Rand.

a) Zeigen Sie: Es gibt keine Retraktion $r \in C^2(M, \partial M)$.

b) Folgern Sie: Jede Abbildung $f \in C^2(\overline{B}_1(0), \mathbb{R}^n)$ mit $f(\overline{B}_1(0)) \subset \overline{B}_1(0)$ hat einen Fixpunkt.

Hinweis. Betrachten Sie auf ∂M eine Differentialform mit Integral ungleich Null.

Abgabe der Lösungen bis Montag 23.01.2023 um 12:00, E-mail oder Postkasten, Ernst-Zermelo-Str. 1