Aufgabe 1 (*Zum Abstand auf* $\mathbb{R}^n$ *und* $\mathbb{S}^n$)
Nach Vorlesung gilt für den Riemannschen Abstand

$$d(p,q) = |p-q| \text{ in } \mathbb{R}^n \quad \text{ und } \quad d(p,q) = \arccos\langle p,q\rangle \text{ in } \mathbb{S}^n.$$

Bestimmen Sie jeweils alle stückweisen C^1-Kurven von p nach q, deren Länge gleich dem Abstand ist.

Aufgabe 2 (*Eindimensionale Mannigfaltigkeiten*)
Sei (M,g) eine zusammenhängende, eindimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(a) Zu $p \in M$ gibt es eine nicht erweiterbare Kurve $c \in C^1((a,b),M)$ mit $\|c'\|_g \equiv 1$ und $c(0) = p$. Diese Kurve ist surjektiv.

(b) Entweder c ist injektiv und damit Isometrie, oder c ist periodisch und liefert eine Isometrie von $(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}), dx^2)$ mit M für geeignetes $L > 0$.

Bemerkung. Jede zusammenhängende, eindimensionale Mannigfaltigkeit ist also diffeomorph zu $\mathbb{R}$ oder zu $\mathbb{S}^1$.

Aufgabe 3 (*Minkowski-Modell und Poincaré-Modell von* $\mathbb{H}^n$)
Sei $\langle\, ,\, \rangle_L$ die Minkowski-Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$, d.h. $\langle x,y\rangle_L = -x^0y^0 + \sum_{i=1}^n x^iy^i$, und

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x,x\rangle_L = -1,\, x^0 > 0\}.$$

Für $X, Y \in T_p\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei $g(X,Y) = \langle X,Y\rangle_L$. Zeigen Sie:

(a) $(\mathbb{H}^n, g)$ ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(b) Die Abbildung $I(x) = -e_0 - 2\langle x+e_0, x+e_0\rangle_L^{-1}\,(x+e_0)$ ist ein Diffeomorphismus von $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ auf $\mathbb{H}^n$, und es gilt

$$F^*g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2} \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i.$$

Aufgabe 4 (*Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf* S^n)
Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $u(x) = \langle a,x\rangle$ mit $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, Lösung der Gleichung $-\Delta_{\mathbb{S}^n} u = \lambda u$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.