**Aufgabe 1** (2+1+1 = 4 Punkte)
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ und sei $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Kreuzprodukt. Zeigen Sie

(a) $(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a$ (*Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ*).

(b) $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle$.

(c) $a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0$ (*Jacobi Identität*).

**Aufgabe 2** (1+3 = 4 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Traktrix (oder Schleppkurve) $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = \left(\cos t + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right), \sin t\right)$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Tangente der Traktrix die $x$-Achse schneidet und dass die Länge des Segments der Tangente zwischen dem Berührpunkt mit der Traktrix und dem Schnittpunkt mit der $x$-Achse für alle Tangenten der Traktrix gleich ist.

**Aufgabe 3** (2+2 = 4 Punkte)
Eine Kreisscheibe vom Radius 1 in der Ebene rollt ohne zu Rutschen auf der $x$-Achse. Die durch einen Punkt auf dem Rand beschriebene Kurve heißt Zykloid.

(a) Finden Sie einen parametrisierte Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ deren Bild dem Zykloid entspricht, und bestimmen Sie die singulären Punkte.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge des Zykloides nach einer ganzen Umdrehung der Kreisscheibe.