
Aufgabe 1 (2+2 = 4 Punkte)

(a) Parametrisieren Sie für $a > 0$ die Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, a\cosh(t/a))$, nach Bogenlänge.

(b) Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, u(t))$. Zeigen Sie: $\kappa(t) = \frac{u''(t)}{(1+u'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$. Berechnen Sie die Krümmung der Kurve aus Teilaufgabe (a).

Aufgabe 2 (2+2= 4 Punkte)
Berechnen Sie jeweils die Krümmung der

(a) Traktrix (Blatt 1, Aufgabe 2),

(b) Zykloide (Blatt 1, Aufgabe 3).

Aufgabe 3 (2+2 = 4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion.

(a) Sei $f(p) = 0$ und $\nabla f(p) \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von p und eine reguläre(!) C^2-Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, so dass für alle $q \in U$ gilt:

$$f(q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in I : \alpha(t) = q.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.

(b) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2 Kurve, so dass $f(\alpha(t)) = 0$ und $\nabla f(\alpha(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$. Zeigen Sie:

$$\nabla f(\alpha(t)) \perp T(t) \text{ und } \kappa(t) = -\frac{D^2 f(\alpha(t))(T(t), T(t))}{\langle \nabla f(\alpha(t)), N(t)\rangle}$$

wobei T das Einheitstangentenfeld und N das Einheitsnormalenfeld entlang α bezeichnet, und $D^2 f(p)(\cdot, \cdot)$ die zweite Ableitung (*Hesse Form*) von f an der Stelle p ist.
Hinweis: Leiten Sie beide Seiten der Gleichung $f \circ \alpha(t) = 0$ zweimal nach t ab. Begründen Sie auch, dass der Nenner in der Formel für κ nicht verschwindet.