
Aufgabe 1 (2+2 = 4 Punkte) Die Kurve $\alpha : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0) & \text{für } t < 0, \\ (0,0,0) & \text{für } t = 0, \\ (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}) & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass α eine reguläre C^∞-Kurve ist und berechnen Sie die Krümmung $\kappa : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $\kappa \in C^\infty$. Für welche t gilt $\kappa(t) = 0$?

(b) Zeigen Sie: $B(t) = (0,0,1)$ für $t < 0$ und $B(t) = (0,-1,0)$ für $t > 0$, und $\tau(t) = 0$ für alle $t \neq 0$.

Hinweis: Sie können verwenden, dass die Funktion f gegeben durch $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ unendlich oft stetig differenzierbar ist. (Wir verweisen auf Analysis-Grundvorlesungen)

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, die ganz in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius $r > 0$ enthalten ist. Sei $t_0 \in (a,b)$ so, dass $\alpha(t_0)$ auf dem Rand der Kugel liegt. Zeigen Sie, dass $\kappa(t_0) \geq \frac{1}{r}$ ist.

Hinweis: Beweisen Sie die Behauptung zunächst mit der zusätzlichen Annahme, dass α nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 3 (2+2 = 4 Punkte)

(a) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige reguläre ebene Kurve. Beweisen Sie die folgenden verallgemeinerten Versionen der Frenet'schen Gleichungen

$$T' = |\alpha'|\kappa N, \quad N' = -|\alpha'|\kappa T.$$

Zeigen Sie auch: Falls $T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ für eine C^1-Funktion $\theta : I \to \mathbb{R}$, so gilt $\theta' = |\alpha'|\kappa$.

(b) Beweisen Sie folgende verallgemeinerte Version des sog. *Hauptsatzes der ebenen Kurventheorie*:
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $g : I \to (0, \infty)$ eine C^1-Funktion, so existiert eine reguläre Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa = f$ und $|\alpha'| = g$. Zusatz: Diskutieren Sie, ob und inwiefern die Kurve α eindeutig bestimmt ist.