Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $r > 0$ und sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir bezeichnen mit rI das Intervall $\{t \in \mathbb{R} : t/r \in I|\}$. Seien $\alpha : I \to R^2$ und $\beta : rI \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert, und für alle $s \in I$ gelt $\kappa_\beta(rs) = \frac{1}{r}\kappa_\alpha(s)$.
Zeigen Sie: Es existiert eine orientierungserhaltende Isometrie F des $\mathbb{R}^2$, so dass $r\alpha(s) = F(\beta(rs))$ für alle $s \in I$ (α und β sind ähnlich).
Hinweis: Benutzen Sie Anwesenheitsaufgabe 2 (aus Woche 4) und den Hauptsatz der ebenen Kurventheorie.

(b) Für $a > 0$ bezeichne $\alpha_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmungsfunktion $\kappa_a(s) = \frac{s}{a^2}$, die sognenannte Klothoide. Zeigen Sie: Für $a, b > 0$ sind α_a und α_b ähnlich im Sinne von (a). Bestimmen Sie den Streckfaktor r.

Aufgabe 2 (2+2 = 4 Punkte) Sei $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, stückweise C^1-Kurve und $p \in \mathbb{R}^2 \backslash \alpha([0, T])$. Sei $\theta : [0, T] \to \mathbb{R}$ eine Winkelfunktion für $\frac{\alpha(t)-p}{|\alpha(t)-p|}$, d.h. $\alpha(t) - p = r(t)\,(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ wobei $r(t) = |\alpha(t) - p|$.
Indentifiziert man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch $(x, y) \mapsto x + iy$, so geht $(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ über in $e^{i\theta(t)}$, und es gilt $\alpha(t) - p = r(t)e^{i\theta(t)}$. Zeigen Sie:

(a) Für $t \in [0, T]$ gilt:

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - p} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t).$$

(b) Die Umlaufzahl von α um p errechnet sich durch

$$n_\alpha(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^T \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - p}dt.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, C^1-geschlossene C^2-Kurve. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} (\kappa(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} \langle \alpha''(t), \alpha''(t)\rangle dt \geq 2\pi.$$

Diskutieren Sie den Gleichheitsfall.