Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^3-Kurve und $t_0 \in I$ mit $\kappa(t_0) \neq 0$. Setze $m := \alpha(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} n(t_0)$ und $r := \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und es sei K der Kreis mit Mittelpunkt m und Radius r. K heißtKrümmungskreise von α in t_0. Zeigen Sie

(a) α berührt K von mindestens zweiter Ordnung.

(b) t_0 ist genau dann ein Scheitelpunkt, wenn α in t_0 ihren Krümmungskreis von mindestens dritter Ordnung berührt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\theta : [0, t_0] \to \mathbb{R}$ eine Winkelfunktion für das Einheitstangentenvektorfeld $T : [0, t_0] \to \mathbb{S}^1$ einer regulären C^1-Kurve $\alpha : [0, t_0] \to \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie: Ist $[a, b] \subset [0, T]$ ein Interval, auf dem θ konstant ist, so gilt $\alpha([a, b]) \subset \mathcal{T}(\alpha, a) = \mathcal{T}(\alpha, t)$ für alle $t \in [a, b]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Die Kurve $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ parametrisiert eine Ellipse mit $0 < a < b$. Zeigen Sie: α hat genau 4 Scheitelpunkte.

Bonusaufgabe (keine Punkte)
Zeigen Sie durch Widerspruch den *Fundamentalsatz der Algebra*, d.h. dass jedes komplexe Polynom

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad n \geq 1$$

eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat.
Hinweis: Führen Sie die Annahme, dass P keine Nullstelle hat zu einem Widerspruch. Betrachten Sie dazu die Umlaufzahl von $c_R(t) = P(Re^{it})$ bezüglich des Nullpunkts, und finden Sie eine geeignete Homotopie.