Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\alpha : [0, t_0] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^2-geschlossene, reguläre Kurve, so dass das Normalenfeld $N(t)$ *nach Innen zeigt*, d.h. $\alpha([0, t_0]) = \partial U$ für ein beschränktes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(t) + sN(t) \in U$ für alle $s > 0$ klein genug. Zeigen Sie: $\bar{U}$ ist konvex genau dann, wenn $\kappa \geq 0$.
Hinweis: Verwenden Sie, dass nach Lemma 2.14 $\bar{U}$ genau dann konvex ist, wenn für alle $s, t \in [0, t_0]$ gilt $\langle \alpha(t) - \alpha(s), N(t) \rangle \geq 0$.

Aufgabe 2 (3+1 Punkte) (Röhrenflächen)
Sei $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, deren Krümmung nirgends verschwindet. Die Röhrenfläche vom Radius $r > 0$ um α wird parametrisiert durch $X : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$X(s, \phi) = \alpha(s) + r \cos \phi N(s) + r \sin \phi B(s).$$

(a) Zeigen Sie: X ist genau dann überall regulär, wenn $r < \frac{1}{\kappa(s)}$ für alle $s \in (a, b)$.

(b) Liegt $\alpha(I)$ in einer Ebene, so stehen die Parameterlinien senkrecht aufeinander.

Aufgabe 3 (2+2 = 4 Punkte) (Rotationsflächen)
Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$ eine Kurve, die ganz in der x-y-Ebene verläuft. Die Menge F, die man erhält, indem man das Bild von α um die x-Achse rotieren lässt, nennt man Rotationsfläche.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung von F an. Unter welchen Vorraussetzungen ist diese Parametrisierung regulär?

(b) Sei speziell $\alpha(t) = (\cos t, 2 + \sin t, 0)$. Die Fläche, die durch Rotation von α um die x-Achse entsteht, heißt Rotationstorus. Fertigen Sie eine Skizze an.