Aufgabe 1 (4=1+1+1+1 Punkte)
Finden Sie Parametrisierungen $X : U \to \mathbb{R}^3$, $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, für die folgenden implizit gegebenen Flächen, so dass X injektiv ist und $X(U)$ bis auf eine glatte Kurve die ganze Fläche überdeckt:

(i) $x^2 + y^2 = 1$ (Zylinder)

(ii) $x^2 + y^2 = z$ (elliptischer Paraboloid)

(iii) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (einschaliger Hyperboloid), und

(iv) $x^2 + y^2 = (\cosh z)^2$ (Katenoid).

Fertigen Sie Skizzen dieser Flächen an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Berechnen Sie die 1. Fundamentalform der folgenden Flächenstücke:

(a) $X(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ $(u,v) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty)$
(Zylinder)

(b) $X(u,v) = (v \cosh u, v \sinh u, v^2)$ $(u,v) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty)$
(hyperbolischen Paraboloid)

(c) $X(u,v) = (av \cos u, av \sin u, v)$ $(u,v) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty)$, $a \in (0,1)$
(Kegel).

Sind die Flächenstücke längentreu/winkeltreu/flächentreu?

Aufgabe 3 (4=1+2+1 Punkte) (Stereographische Projektion)
Für $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir die Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch die beiden Punkte $(0,0,2)$ und $(u,v,0)$. Diese Gerade schneidet die Sphäre

$$\tilde{\mathbb{S}}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$$

in genau zwei Punkten. Der eine ist $(0,0,2)$, der andere werde mit $X(u,v)$ bezeichnet.

(a) Skizzieren Sie die beschriebene Situation.

(b) Geben Sie eine Formel für $X(u,v)$ an und zeigen Sie, dass $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ regulär ist.

(c) Berechnen Sie die erste Fundamentalform und zeigen Sie, dass X winkeltreu ist.