Übung zur Vorlesung Kurven und Flächen | Sommersemester 2022, Blatt 8
Dr. Christian Ketterer, Dr. Marius Müller | 21. Juni 2022

Aufgabe 1 (1+1+1+1=4 Punkte) (Regelflächen)
Ein Flächenstück $X : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $X(t,s) = \alpha(t) + sV(t)$ heißt *Regelfläche*, wobei $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $V : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ C^1 mit $|V| = 1$ ist.

(a) Unter welchen Bedingungen ist X an der Stelle (t,s) regulär?

(b) Zeigen Sie: Die Tangentialebene $T(X,(t,s))$ ist (wo sie existiert) genau dann unabhängig von s, wenn die Vektoren $\alpha'(t), V'(t)$ und $V(t)$ linear abhängig sind.

Ist $V(t) = \alpha(t) - p$ für ein $p \in \mathbb{R}^3$, so nennt man X einen (verallgemeinerten) Kegel (mit Spitze in p), ist V konstant, so nennt man X einen (verallgemeinerten) Zylinder. Die Fläche $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}xy\}$ enspricht nach einer 45-Grad Drehung um die z-Achse dem hyperbolischen Paraboloid (Blatt 6, Aufgabe 2 (b)).

(c) Skizzieren Sie einen Kegel und einen Zylinder.

(d) Skizzieren Sie den hyperbolischen Paraboloid und finden sie eine Parametrisierung als Regelfläche. *Hinweis:* Betrachten Sie die Kurve $\alpha(t) = (t,0,0)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Ein *sphärisches Dreieck* ist eine in einer Hemisphäre von $\mathbb{S}^2$ enthaltene Menge Δ, die von 3 Großkreissegmenten der Länge $< \pi$ berandet wird. α, β, γ bezeichnen die Innenwinkel von Δ sind. Zeigen Sie, dass für die Oberfläche $A(\Delta)$ von Δ gilt:

$$A(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Anleitung: Berechnen Sie zuerst die Oberfläche eines von zwei halben Großkreisen berandeten "Zweiecks". Die zu Δ gehörenden Großkreise zerlegen $\mathbb{S}^2$ in 8 Dreiecke, wobei je zwei gegenüberliegende Dreiecke kongruent sind (die selbene Innenwinkel haben). Die Innenwinkel von Δ erzeugen 6 Zweiecke, die die Sphäre überdecken und sich nur in Δ und seinem gegenüberliegenden, kongruenten Dreieck überlappen.

Aufgabe 3 (2+2=4 Punkte) (Röhrenflächen)
Seien $r > 0$, $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve so, dass $\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$ für alle $t \in (a,b)$, und $X : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Röhrenfläche definiert durch

$$X(s,\phi) := \alpha(s) + r\cos\phi N(s) + r\sin\phi B(s)$$

(Blatt 6, Aufgabe 2).

(a) Berechnen Sie die Oberfläche von $X|_{(a,b)\times(0,2\pi)}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser und der Länge der Kurve α?

(b) Bestimmen Sie die Oberfläche des Rotationstorus (Blatt 5, Aufgabe 3 (b)).